



Sylvie Lopes Marques Teorema da Galeria de Arte e Variantes



Sylvie Lopes Marques Teorema da Galeria de Arte e Variantes

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Dr. António Leslie Bajuelos Dominguez, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri

Presidente

Doutora Maria Rosália Dinis Rodrigues, Professora Associada da Universidade de Aveiro.

Vogais

Doutor Adriano Lopes Martins, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Doutor António Leslie Bajuelos Dominguez, Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro. (Orientador)

Dedicatória

Aos meus Pais

Agradecimentos

- Ao Professor Doutor A. Leslie Bajuelos Dominguez, pela sua competente orientação;
- Aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro que de uma forma ou de outra me apoiaram na realização deste trabalho;
- Aos meus pais e irmãos, por não terem reclamado o tempo que eu não lhes dediquei, pelo carinho que sempre me dispensaram e pelo ânimo que me transmitiram;
- Ao Director Albano Braga, à Ivone e à Catarina, do Centro de Formação para Jovens da Metalúrgica Progresso, pela simplicidade e simpatia com que sempre me ajudaram;
- Ao André Marques, à Ana Paula Nolasco, à Ana Margarida Santos, à Emília Santos, ao Mário Mendes e ao Paulo Almeida por todo o apoio que me prestaram.

resumo

Muitos dos problemas que surgem no quotidiano envolvem vigiar ou iluminar regiões. Tem-se por exemplo: colocar câmaras de vigilância no supermercado local, posicionar antenas para redes telefónicas rádio móvel, ou mesmo iluminar a nossa sala de estar. O Problema da Galeria de Arte [37] é um problema famoso na área da geometria computacional que retrata formalmente este tipo de aplicações.

O Problema da Galeria de Arte para um polígono arbitrário P , tem por objectivo encontrar um conjunto G , que contém um número mínimo de pontos de P , de modo a que todos os pontos de P sejam visíveis de algum ponto de G . Dois pontos dizem-se visíveis num polígono se o segmento de recta que os une estiver totalmente contido em P .

Em 1975, Chvátal [8] mostrou que para um polígono simples com n lados, o número mínimo de pontos de G nunca excederá $\frac{n}{3}$. Este resultado é conhecido por Teorema da Galeria de Arte. Em 1978, Fisk [16] propôs uma prova alternativa bastante simples. A ideia desta prova permitiu que Avis e Toussaint [4], em 1981, desenvolvessem um algoritmo com complexidade $O(n \ln n)$ para determinar a posição dos $\frac{n}{3}$ guardas num polígono simples. No entanto, em 1986, Lee e Lin [29] provaram que o Problema da Galeria de Arte é NP-difícil.

Desde o resultado de Chvátal, numerosas variantes do Problema da Galeria de Arte têm vindo a ser estudadas: incluindo guardas móveis, guardas com visibilidade ou mobilidade limitadas, iluminação de polígonos ortogonais, entre outros.

Com o presente trabalho, pretende-se fazer uma abordagem ao estudo do Teorema da Galeria de Arte e de algumas das suas variantes. Inicia-se esta dissertação com algumas noções básicas, seguidamente introduz-se e formaliza-se o Teorema da Galeria de Arte, e finaliza-se com o estudo de algumas das variantes supracitadas.

abstract

Many problems that arise in everyday situations involve guarding or illuminating regions. Some examples are: placing TV-cameras in the local supermarket, positioning radio antennas for cellular phones, or arranging the lighting in one's living room. The Art Gallery Problem [37] is famous in computational geometry that formally models these types of applications.

The Art Gallery Problem for a polygon P is to find a minimum set of points G in P such that every point of P is visible from some point of G . Two points in a polygon are called visible if the straight-line segment between them lies entirely inside the polygon.

In 1975, Chvátal [8] showed that the number of points of G will never exceed $\frac{n}{3}$ for a simple polygon of n sides. This latter result is referred to as The Art Gallery Theorem. In 1978, Fisk [16] showed an alternative and easier proof. Avis and Toussaint [4], in 1981, mimicked Fisk's proof rather directly to obtain an $O(n \ln n)$ algorithm for placing $\frac{n}{3}$ guards on a simple polygon. However, the Art Gallery Problem has been shown to be NP-Hard by Lee and Lin [29], in 1986.

Since Chvátal's result, numerous variations on the Art Gallery Problem have been studied, including mobile guards, guards with limited visibility or mobility, guarding of rectilinear polygons, and others.

This work intends to be an approach to Art gallery theorem and some of its variations. It begins with some basic notions followed by the formalization of the Art Gallery Theorem. Finally, some of the variations of the problem above are examined.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Preliminares, Definições e Notações	1
1.1 As Funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$	1
1.2 Polígonos e Grafos	3
1.2.1 Definição de Polígono	3
1.2.2 Famílias de Polígonos	6
1.2.3 Grafos	7
2 Decomposição de Polígonos	15
2.1 Triangulação	16
2.2 Quadrilaterização Convexa de Polígonos Ortogonais	20
2.3 Decomposição de Polígonos com Buracos	26
2.4 Decomposição de Polígonos Ortogonais em Polígonos <i>L-shape</i>	31
3 Teorema da Galeria de Arte	37
3.1 Visibilidade em Polígonos Simples	37
3.1.1 Grafo de Visibilidade	40
3.2 Formalização do Problema da Galeria de Arte	40
3.3 Complexidade do Problema da Galeria de Arte	51
4 Variantes do Teorema da Galeria da Arte	53
4.1 Definições	53
4.2 Guardas em Polígonos com Ângulos Reflexos	55
4.3 Guardas em Polígonos Ortogonais	56
4.4 Guardas em Polígonos com Buracos	58
4.5 Guardas Móveis em Arestas	60
4.6 Problemas da Fortaleza e Problema do Pátio duma Prisão	83
4.6.1 Problema da Fortaleza	83
4.6.2 Problema do Pátio duma Prisão	90
4.7 Iluminação Utilizando Reflectores	92
4.8 Rota do Observador e do Ladrão	99
4.8.1 A Rota do Observador	99
4.8.2 A Rota do Ladrão	103
Conclusão	109

Introdução

Cada vez mais as salas dos museus e, nomeadamente, das galerias de arte têm formas irregulares. Assim, as plantas das salas não se traduzem em meros rectângulos, mas em polígonos com variadíssimas formas, o que origina interessantes problemas de iluminação. Se a planta for um polígono convexo, bastará uma única fonte de iluminação para iluminar toda a sala, mas a irregularidade impede esta económica solução.

Neste sentido, em 1973, V. Klee [37] propôs o problema de determinar o menor número de guardas suficientes para vigiar o interior de uma sala de uma galeria de arte com n paredes. Informalmente, cada guarda é considerado como um ponto fixo que vê tudo à sua volta (ou câmaras de vigilância que cobrem uma amplitude de 2π radianos). Um conjunto de guardas vigia uma sala, se cada ponto da sala puder ser visto por algum guarda.

Em 1975, V. Chvátal [8] provou que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para vigiar uma sala com n paredes.

Em 1978, S. Fisk [16] apresentou uma outra prova, do mesmo teorema, mais elegante e mais curta, utilizando apenas uma página. Este Teorema simples, designado como o **Teorema da Galeria de Arte**, tem sido estendido por matemáticos em várias direcções e desenvolvido por cientistas da computação no estudo de algoritmos de partição de polígonos.

O fragmento de texto a seguir transcrito foi extraído de “*How many guards in the Gallery* de Ian Stewart” [46].

State-of-the-art Gallery houses the Sandy Warthog collection

...

“Naturally the Warthog Collection will be fitted with all the latest electronic surveillance gear,” said Harry Sams, chief of security.

“An individual micro-camera will face every painting”.

“No, I want something special for the Warthog Collection,” interrupted Parrot.

“Uh—*how* special?”

“*Real* special, Harry. I want guards. Human guards.”

“Boss, let’s not get too ambitious, huh? Do you realize the cost in positive security vetting alone? Not to mention medical insurance, severance pay, coffee-break tokens. Real people cost real money, Boss. No, what I suggest is the latest sniffer robots from Notso-bitchi and maybe a coupla.”

“I want guards, Harry.”

“Boss. Guards. Uh—how many?”

“Enough to make sure that every square inch of the building can be seen by at least one guard. I want each guard stationed on a swivel chair, so that in effect each one has all-around vision. Hire as many as the job needs – but not a single guard extra, you understand? Human guards cost real money, you know.”

...

A necessidade de encontrar um algoritmo que calcule o número mínimo de guardas que vigiem um polígono dado surge naturalmente. Infelizmente, Lee e Lin [29] concluíram que não existe nenhum algoritmo eficiente que resolva o problema, provando que este é de complexidade NP-difícil.

Ao tentarem dar resposta ao problema proposto por Klee surgiram várias questões:

- O que acontece se a planta da sala a vigiar é um polígono “especial”?
- O que acontece se o pretendido for vigiar o exterior de um polígono?
- O que acontece ao mudar a natureza e as características dos guardas?
- E se as paredes da sala forem espelhos?

De tais questões obtiveram-se variantes do problema clássico da Galeria de Arte.

Os tópicos apresentados neste trabalho pertencem à área da *geometria combinatória*, uma subárea da Matemática, e à área da *geometria computacional*, uma subárea da Ciência da Computação.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. No primeiro são introduzidas algumas noções preliminares essenciais para o estudo do Teorema da Galeria de Arte. O segundo capítulo aborda a decomposição de polígonos em triângulos e em quadriláteros convexos. O Teorema da Galeria de Arte é formalizado no terceiro capítulo. Este será

introduzido com uma breve alusão à visibilidade em polígonos simples e à definição de Grafo de visibilidade. Neste capítulo também é referenciada a complexidade do Problema da Galeria de Arte. Finalmente, no quarto e último capítulo, são apresentados alguns resultados do teorema original, ou seja, Variantes do Teorema da Galeria de Arte.

Capítulo 1

Preliminares, Definições e Notações

Este capítulo tem como objectivo apresentar definições, notações e resultados essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes. O capítulo está estruturado em dois subcapítulos. Primeiramente serão definidas as funções chão (“*floor*” em inglês) e tecto (“*ceiling*” em inglês), sendo apresentadas e demonstradas algumas das suas propriedades. No segundo subcapítulo serão introduzidas as definições de polígono e de grafo.

1.1 As Funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$

Pretende-se definir duas funções em escada, fundamentais para o estudo do Teorema da Galeria de Arte: função $\lfloor x \rfloor$ (*Chão*) e função $\lceil x \rceil$ (*Tecto*). Cada número real x pode ser escrito da seguinte forma

$$x = n + z, \text{ onde } n \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq z < 1.$$

Definição 1.1 *Chama-se a n a parte inteira, ou “Chão”, de x e denota-se por $\lfloor x \rfloor$; e z designa-se por parte decimal de x e denota-se por $\{x\}$.*

Assim, para $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não excede x . Normalmente confunde-se a parte decimal de x com a parte que se segue à vírgula, mas esta noção só é válida para números positivos. A parte decimal define-se da seguinte forma

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.2 *A função “Tecto”, denotada por $\lceil x \rceil$, é o menor número inteiro maior ou igual a x .*

Deste modo, podemos relacionar as funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ da seguinte forma

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x = \lfloor x \rfloor, & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Consequentemente: $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x \wedge \lceil x \rceil \geq x$, (ver figura 1.1).

Algumas propriedades das funções referidas são apresentadas de seguida:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$$

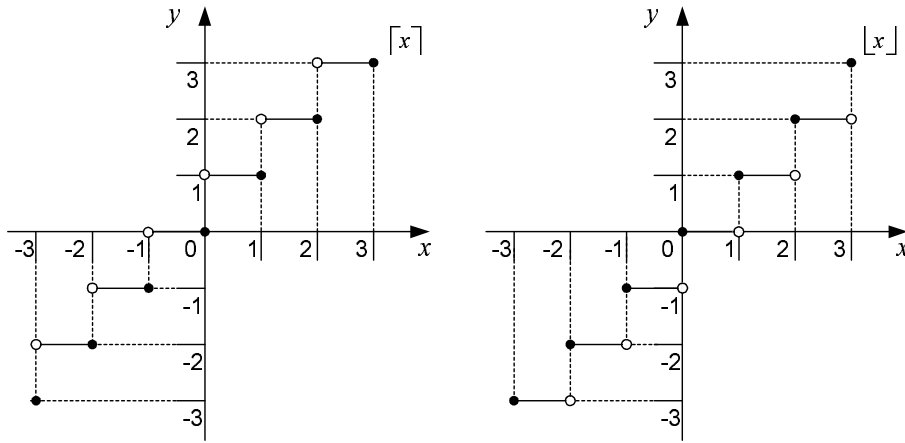


Figura 1.1: Representação gráfica das funções $[x]$ e $\lfloor x \rfloor$

- (i) $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$
- (ii) $x = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- (iii) $x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$
- (iv) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
- (v) $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$
- (vi) $\{x + k\} = \{x\}$
- (vii) $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ toma o valor 0 ou 1
- (viii) $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
- (ix) $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$
- (x) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$
- (xi) para $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tem-se $\lceil \frac{n}{a} \rceil / b = \lceil \frac{n}{ab} \rceil$ e $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor / b = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$

De seguida, apresentam-se as provas de algumas das propriedades anteriores.

Prova das propriedades (vii), (viii), (ix) e (x).

(vii) Aplicando a propriedade (iv) tem-se:

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y, \quad (1)$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{e} \quad (2)$$

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y. \quad (3)$$

De (1), (2) e (3) resulta

$$x + y - 1 - x - y < \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < x + y - x + 1 - y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2$$

e tendo em conta que

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z},$$

obtemos

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \text{ toma o valor } 0 \text{ ou } 1.$$

(viii) Pela prova anterior conclui-se que

$$\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \geq 0 \Leftrightarrow \lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor.$$

(ix) Para demonstrar esta propriedade basta conjugar as propriedades (i) e (viii)

$$\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y - \{x + y\} \geq x - \{x\} + y - \{y\} \Leftrightarrow \{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$$

(x) Pela propriedade (iv) tem-se que

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 \Leftrightarrow n - 1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil < n + 1$$

No entanto,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil \in \mathbb{N}$$

e podemos concluir que

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n.$$

1.2 Polígonos e Grafos

1.2.1 Definição de Polígono

Os polígonos são utilizados para representar uma grande variedade de formas e figuras, tanto computarizadas como feitas com lápis, no reconhecimento de padrões, na robótica e noutros campos computacionais. Dependendo do domínio da sua aplicação, os polígonos podem ser classificados de diferentes maneiras. Por exemplo, em aplicações VLSI (*Very Large Scale Integration*) os polígonos mais utilizados têm lados paralelos aos eixos coordenados e são designados por polígonos ortogonais.

Para definir polígono primeiro recorrer-se-á à definição de curva poligonal simples e fechada.

Definição 1.3 Sejam v_0, \dots, v_{n-1} n pontos do plano (todos os índices aritméticos são $\text{mod } n$ de forma a implicar um ciclo ordenado de pontos, com v_0 seguido de v_1 , desde que $(n+1)+1 \equiv n \equiv 0 \pmod{n}$). Sejam $e_0 = [v_0v_1]$, \dots , $e_i = [v_iv_{i+1}]$, \dots , $e_{n-1} = [v_{n-1}v_0]$, n segmentos de recta que ligam os v_0, \dots, v_{n-1} pontos. Estes pontos formam uma curva poligonal simples e fechada se e só se:

- (i) no ciclo ordenado, a intersecção de cada par de segmentos adjacentes é o simples ponto partilhado entre eles: $e_i \cap e_{i+1} = \{v_{i+1}\}$, $\forall i = 0, \dots, n-1$.
- (ii) segmentos não adjacentes não se intersectam: $e_i \cap e_j = \emptyset$, $\forall j \neq i+1$.

Designam-se por *vértices* da curva poligonal os pontos v_0, \dots, v_{n-1} e por *arestas* os segmentos de recta e_0, \dots, e_{n-1} .

Tendo em conta a definição anterior, uma curva poligonal é *fechada* se o último ponto da sequência for igual ao primeiro, i.e, $v_0 = v_n$. Uma curva poligonal é *simples* se ela não se auto-intersectar, ou seja, se duas arestas não consecutivas não se intersectarem. Isto significa que o segmento e_i intersecta no máximo o segmento e_{i+1} no ponto v_{i+1} ($i = 0, \dots, n-2$), (ver figura 1.2).

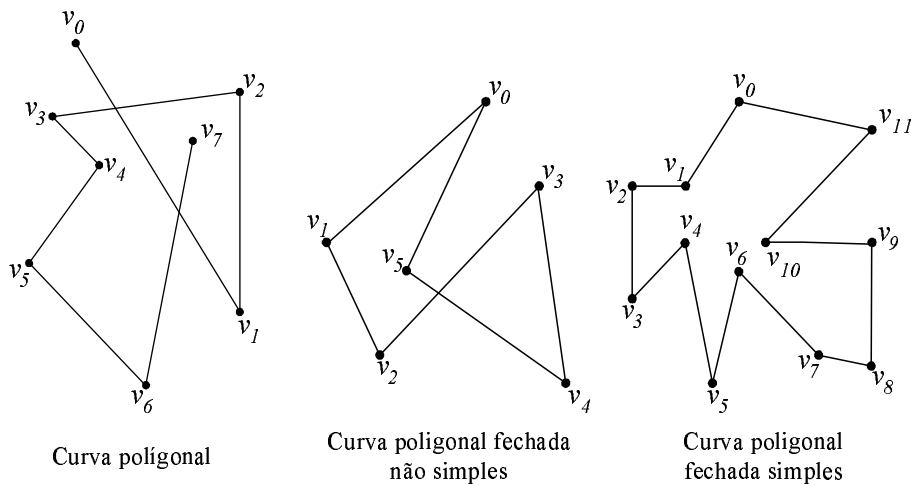


Figura 1.2: curvas poligonais

O famoso Teorema de Jordan diz que toda a *curva poligonal simples e fechada* divide o plano em duas regiões, o interior e o exterior da curva.

Definição 1.4 Define-se por *polígono* a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma *curva poligonal simples*.

Por convenção, os vértices de um polígono são listados pela ordem em que aparecem ao percorrer a fronteira do polígono no sentido anti-horário. A fronteira do polígono P será denotada por ∂P . De acordo com a Definição 1.4 conclui-se imediatamente que $\partial P \subset P$.

Nesta dissertação, apenas se estudará polígonos simples, caso seja necessário recorrer a polígonos não simples, tal será referido antecipadamente.

Definição 1.5 Um vértice v de um polígono P diz-se convexo se o ângulo interno, correspondente em P , tiver amplitude inferior ou igual a π radianos, caso contrário, dir-se-á reflexo ou côncavo, (ver figura 1.3).

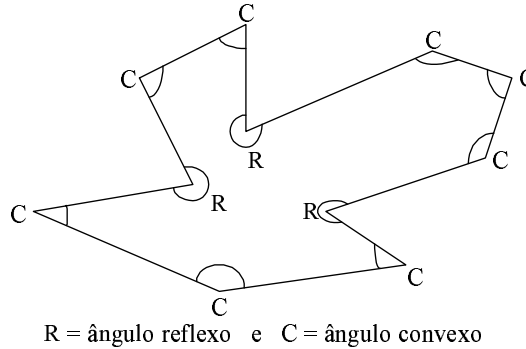


Figura 1.3: Polígono com ângulos reflexos e convexos

Lema 1.1 Todo o polígono tem pelo menos um vértice convexo.

Prova: Seja P um polígono. Orientemos as arestas de P no sentido anti-horário. Um transeunte que ande sobre ∂P , seguindo a orientação estabelecida, teria o interior do polígono à sua esquerda. Assim, num vértice convexo, o transeunte vira à esquerda e, num vértice reflexo, vira à direita.

Seja v um vértice de P com

- (i) y - coordenada mínima; e
- (ii) x - coordenada máxima, respeitando (i).

Seja l a recta horizontal que passa em v . A aresta adjacente à direita de v deve estar acima de l , (ver figura 1.4). Logo, o transeunte deve virar à esquerda em v , i.e, v é um vértice convexo. ■

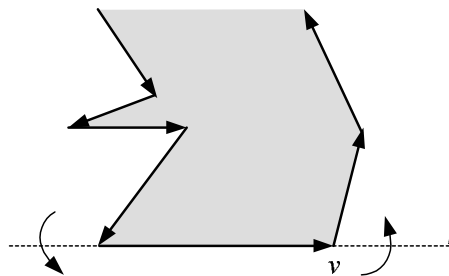


Figura 1.4: Ilustração do Lema 1.1

Definição 1.6 Define-se por invólucro convexo dum conjunto de pontos o menor polígono convexo que contém todos os pontos desse conjunto. Cada ponto do conjunto ou é um vértice desse polígono (o invólucro) ou está no seu interior, (ver figura 1.5).

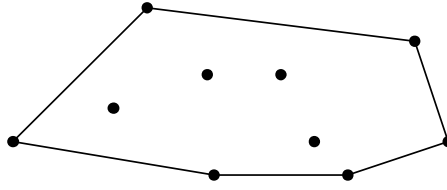


Figura 1.5: Invólucro convexo dum conjunto de 10 pontos

1.2.2 Famílias de Polígonos

Nesta secção pretende-se definir alguns tipos de polígonos que serão objecto de estudo ao longo deste trabalho. Na definição de polígono, o adjectivo “simples” deriva apenas do facto da sua curva poligonal não se auto-intersectar. Não se confunda *simples* com *não complicado*, isto porque estes polígonos podem ser bastante complexos, (ver figura 1.6).

A classificação de polígonos é bastante importante uma vez que permite agrupar polígonos segundo determinadas características que têm em comum. Sabendo que a planta duma sala de Galeria de Arte é um polígono, o objectivo é determinar o menor número de guardas necessários para vigiar o interior da sala.

Definição 1.7 POLÍGONO CONVEXO: *Um polígono P diz-se convexo se qualquer segmento de recta, que une dois pontos de P , está totalmente contido em P , (ver figura 1.6).*

Definição 1.8 POLÍGONO MONÓTONO: *Um polígono diz-se monótono em relação a uma direcção d , se para qualquer recta d' perpendicular a d , a intersecção do polígono com d' é conexa. Um polígono P diz-se monótono se existir uma direcção d tal que P seja monótono em relação a d , (ver figura 1.6).*

Definição 1.9 POLÍGONO ESTRELADO: *Um polígono P diz-se estrelado se tiver pelo menos um ponto p tal que para qualquer ponto $x \in P$, o segmento de recta $[xp]$ está totalmente contido em P , (ver figura 1.6).*

Definição 1.10 POLÍGONO ORTOGONAL: *Um polígono diz-se ortogonal se todas as arestas forem paralelas aos eixos coordenados, (ver figura 1.6).*

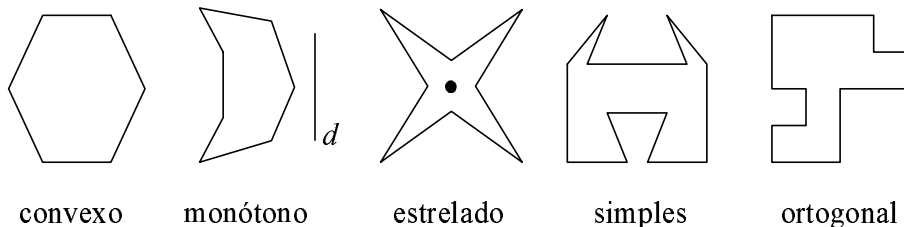


Figura 1.6: Exemplos de polígonos.

Das definições anteriores conclui-se que um polígono convexo é monótono e estrelado. Existem polígonos que são monótonos e não estrelados e vice-versa, tal como existem

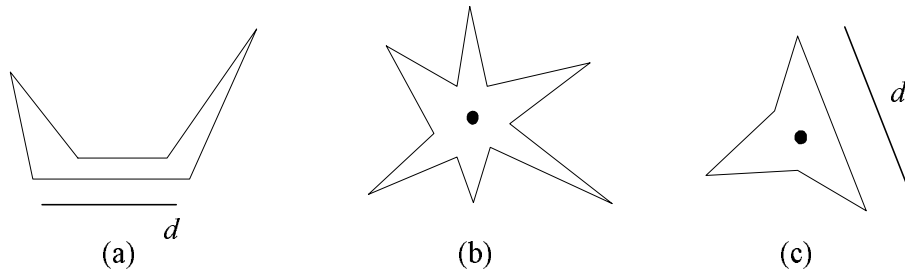


Figura 1.7: Exemplo de polígonos: (a) monótono e não estrelado; (b) estrelado e não monótono; (c) monótono e estrelado.

polígonos monótonos e estrelados simultaneamente, (ver figura 1.7).

Os polígonos ortogonais são muito importantes, apresentam variadíssimas aplicações, nomeadamente, as plantas das tradicionais galerias de arte são na maioria representadas por polígonos ortogonais. Tendo em conta a forma dos polígonos ortogonais, também podemos classificá-los em: espiral, histograma, forma de L (*L-shaped*) e escada, (ver figura 1.8).

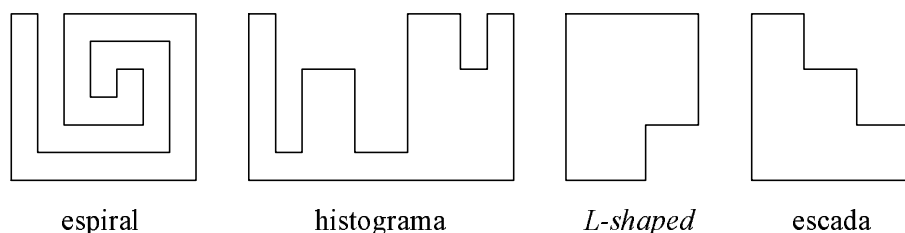


Figura 1.8: Exemplos de polígonos ortogonais

Definição 1.11 Diz-se que um polígono P é um polígono com buracos se contiver no seu interior um conjunto de h polígonos disjuntos H_1, \dots, H_h , denominados por buracos, (ver figura 1.9).

Tendo em conta a Definição 1.11, o polígono P limita uma região múltipla conexa com h buracos: a região interior a P e a respectiva fronteira (fronteira externa), o exterior de H_1, \dots, H_h e as respectivas fronteiras (fronteira interna), (ver figura 1.9(a)).

Definição 1.12 Diz-se que um polígono P é um polígono ortogonal com buracos se os buracos também forem ortogonais, (ver figura 1.9(b)).

1.2.3 Grafos

Na maioria das provas que irão ser apresentadas, nos capítulos seguintes, recorrer-se-á à construção de grafos. Assim sendo, o objectivo desta secção é a introdução da definição de grafo bem como alguns resultados relativos a grafos.

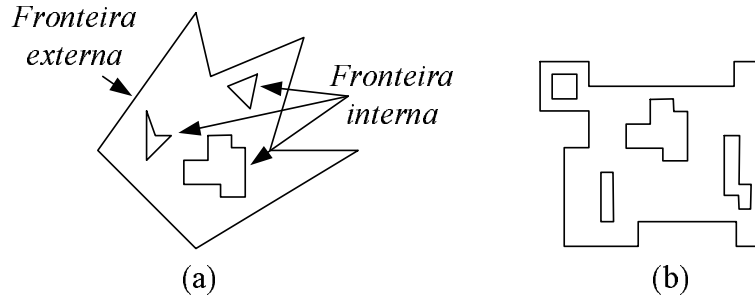


Figura 1.9: Exemplo de: (a) polígono com buracos; (b) polígono ortogonal com buracos.

Definição 1.13 Um grafo G , usualmente denotado por $G = (V, E)$, é formado por um conjunto não vazio V de vértices (ou nós) e um conjunto E de arestas (ou arcos). Uma aresta é um par não-ordenado $[uv]$, sendo u e v elementos de V . Dois vértices, u e v , de G são adjacentes se o par $[uv]$ for um elemento de E .

Definição 1.14 Designa-se por grau de um vértice v , do grafo G , o número de arestas que são incidentes em v .

Definição 1.15 Um grafo diz-se regular quando todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. No caso em que G é um grafo regular e todos os seus vértices têm grau n , diz-se que G é um grafo n -regular, (ver figura 1.10).

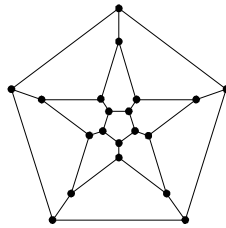


Figura 1.10: Exemplo de um grafo 3-regular, todos os seus vértices têm grau 3.

Definição 1.16 Um grafo diz-se completo quando existir uma aresta entre cada par de vértices. Se G for um grafo completo, designa-se por K_n , sendo n o número de vértices do grafo G , (ver figura 1.11).

Nota: Qualquer vértice de um grafo K_n tem grau $(n-1)$, ou seja, K_n é $(n-1)$ -regular.

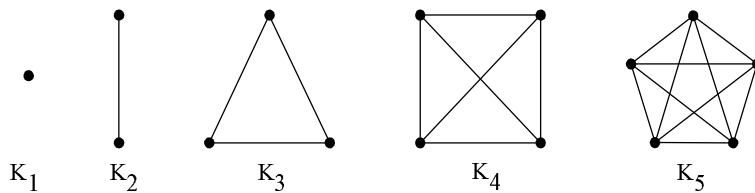


Figura 1.11: Exemplos de grafos completos

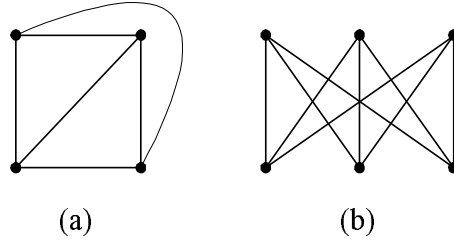


Figura 1.12: (a) Grafo planar; (b) Grafo não planar

Definição 1.17 Um grafo G diz-se planar se for possível dispor os seus vértices no plano, de tal modo que nenhum par de arestas se cruze, (ver figura 1.12).

Definição 1.18 Um caminho de um grafo G é uma sequência de vértices distintos, v_1, \dots, v_k , tal que v_i e v_{i+1} são adjacentes em G , $i = 1, \dots, k$, $k \geq 2$.

No grafo da figura 1.13(a) a sequência de vértices (v_1, v_2, v_5, v_6) é um caminho de G .

Definição 1.19 Um ciclo de G é a união do caminho v_1, \dots, v_k com a aresta $[v_k v_1]$, $k \geq 3$.

No grafo da figura 1.13(a) a sequência de vértices $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_1)$ é um ciclo de G .

Definição 1.20 Um grafo $G = (V, E)$ é conexo se para cada par de vértices de G , u e v , existir um caminho com origem em $u = v_1$ e extremidade $v = v_k$, caso contrário G é desconexo, (ver figura 1.13).

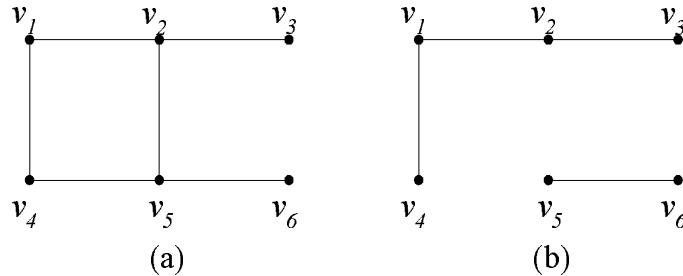


Figura 1.13: (a) Grafo conexo; (b) Grafo desconexo.

Definição 1.21 Um vértice diz-se vértice de corte se a sua remoção, juntamente com as arestas que lhe são adjacentes, provocar uma redução na conectividade do grafo. Por exemplo, o vértice v_2 do grafo da figura 1.13(a) é um vértice de corte.

Definição 1.22 Diz-se que um grafo G é uma árvore se for conexo e não admitir ciclos, (ver figura 1.14).

Definição 1.23 Um grafo $G = (V, E)$ diz-se k -colorível se for possível atribuir cores, c_1, c_2, \dots, c_k , aos vértices de G de tal forma que se u e v forem vértices adjacentes em G , a cor atribuída a u será diferente da cor atribuída a v , (ver figura 1.15).

Por exemplo, na figura 1.16, o vértice v tem grau de saída 1, enquanto que o vértice w tem grau de saída 2.

Definição 1.25 Dado um grafo G , um emparelhamento M de G é um subconjunto de arestas de G , tal que quaisquer duas arestas de M não têm vértices comuns. Um emparelhamento M de G diz-se perfeito se a cada vértice de G incidir uma aresta de M , (ver figura 1.17).

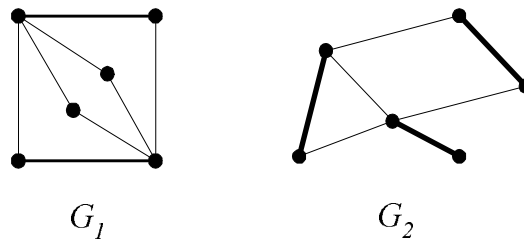


Figura 1.17: O Grafo G_1 tem um emparelhamento com duas arestas, mas não tem um emparelhamento perfeito. O grafo G_2 tem um emparelhamento perfeito.

Definição 1.26 Dado um grafo G e um subconjunto S de vértices de G , designa-se por $Odd(G \setminus S)$ o número de componentes de $G \setminus S$ que admitem um número ímpar de vértices.

Observe-se que se G admitir um subconjunto de vértices S tal que $Odd(G \setminus S) > |S|$, então G não tem nenhum emparelhamento perfeito. Repare-se simplesmente no facto de que em qualquer emparelhamento perfeito de G , pelo menos um elemento de uma componente ímpar de $G \setminus S$ deve incidir num vértice de S . Caso haja mais componentes ímpares em $G \setminus S$ do que elementos de S , não existe nenhum emparelhamento perfeito, (ver figura 1.18).

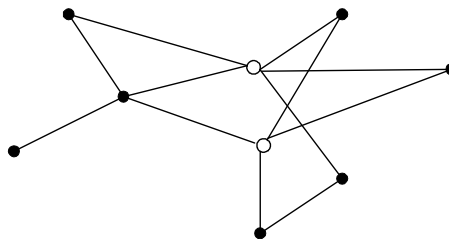


Figura 1.18: Grafo G sem emparelhamento perfeito. Os vértices de S estão representados por pequenos discos vazios.

Definição 1.27 Um grafo G está quase-saturado se não admitir nenhum emparelhamento perfeito, mas ao adicionar-lhe qualquer uma aresta obtém-se um grafo com um emparelhamento perfeito, (ver figura 1.19).

Lema 1.2 Seja S o conjunto dos vértices, dum grafo G quase-saturado, adjacentes a todos os vértices de G , e seja $T = V(G) \setminus S$. Sejam u, v e w elementos de T tais que u e w são adjacentes a v . Então u e w também são adjacentes.

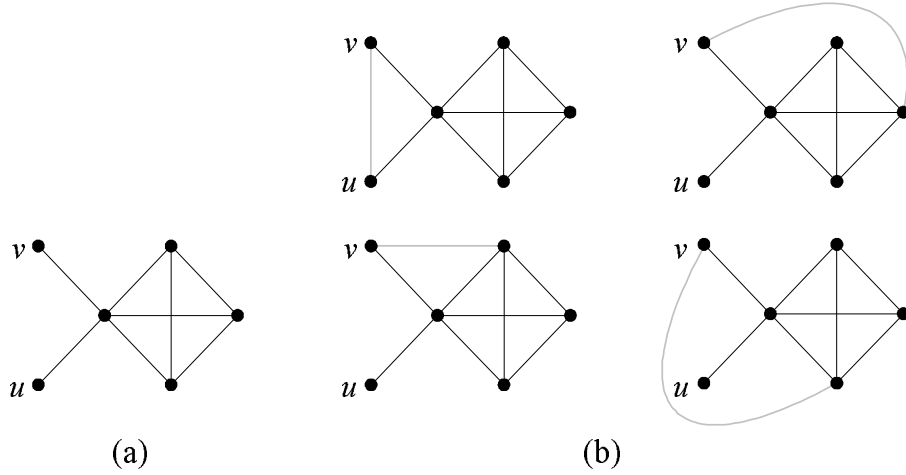


Figura 1.19: (a) Exemplo de um grafo quase-saturado; (b) após adição de qualquer aresta passa a admitir um emparelhamento perfeito, (o caso para o vértice u é simétrico).

Prova: Assuma-se que u e w não são adjacentes. Já que v pertence a T , existe um vértice x de G não adjacente a v em T . Sejam G' e G'' dois grafos obtidos pela adição das arestas $[uw]$ e $[vx]$ a G , respectivamente. Como G é quase-saturado, G' e G'' têm ambos um emparelhamento perfeito. Sejam M' e M'' os respectivos emparelhamentos perfeitos. Como G não tem emparelhamentos perfeitos, $[uw]$ e $[vx]$ estão contidos em M' e M'' , respectivamente.

No grafo obtido pela reunião de M' e M'' , cada vértice tem grau 2. Visto que este grafo consiste num conjunto dum número par de ciclos, com arestas a alternarem entre M' e M'' , podemos então ter dois casos distintos:

- (i) $[uw]$ e $[vx]$ pertencem a ciclos diferentes de $M' \cup M''$;
- (ii) $[uw]$ e $[vx]$ pertencem ao mesmo ciclo.

Suponha-se que $[uw]$ e $[vx]$ pertencem a ciclos diferentes de $M' \cup M''$ e seja C o ciclo que contém $[uw]$. Removendo de M' todas as arestas de C que pertencem a M' e substituindo-as pelas arestas de C que pertencem a M'' , obtém-se um emparelhamento perfeito de G' que não contém $[vw]$, o que é uma contradição.

Por outro lado, supondo agora que ambas as arestas pertencem ao mesmo ciclo, considere-se $v_0 = v$, $v_1 = x$, ..., tendo em conta a ordem em que aparecem em C . Suponha-se, sem perda de generalidade, que w tem menor índice que v . Então, as arestas de C alternam entre M' e M'' , $w = v_{2k+1}$ para algum $k \geq 0$. No entanto, como v e w são adjacentes, o ciclo com vértices $v_0 = v$, $v_1 = x$, ..., $v_{2k+1} = w$, $v_0 = v$ é um ciclo para C' tal que as arestas $[xv_2]$, $[v_3v_4]$, ..., $[v_{2k+1}v_0]$, não consecutivas, pertencem a M' , (ver figura 1.20).

Removendo as arestas de C' que pertencem a M' e substituindo-as pelas arestas de C' que não pertencem a M' , obtém-se de novo um emparelhamento de G' que não contém $[vx]$, o que é contraditório. Assim, u e w são adjacentes em G . ■

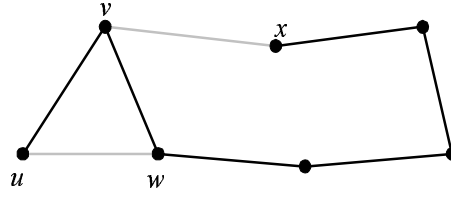


Figura 1.20:

O teorema seguinte demonstra as condições de existência de um emparelhamento perfeito e deve-se a W.T.Tutte [52]. Este resultado será utilizado para provar a quantidade de guardas necessários para vigiar uma Galeria de Arte com salas rectangulares.

Teorema 1.1 (Tutte) *Um grafo G admite um emparelhamento perfeito, se para cada subconjunto S de $V(G)$, a desigualdade $Odd(G \setminus S) \leq |S|$ for verificada.*

Prova: Tal como já foi mencionado anteriormente, se $Odd(G \setminus S) > |S|$ então G não contém um emparelhamento perfeito. Suponha-se que G não admite um emparelhamento perfeito e que G tem um número par de vértices. Caso contrário, se G tiver um número ímpar de vértices, considere-se S como sendo o conjunto vazio e o resultado segue-se.

Pretende-se mostrar que nas condições enunciadas, G contém um subconjunto S de vértices tal que $Odd(G \setminus S) > |S|$. Para isso, adicione-se a G quantas arestas forem possíveis de modo a obter um grafo G' quase-saturado. Como G não é um grafo completo, G' também não o é. Utilizando o mesmo raciocínio, seja S o conjunto de vértices de G' adjacentes a todos os vértices de G' e seja H_0 o subgrafo completo de G' induzido por S . Primeiro prove-se que G' pode ser decomposto num conjunto de subgrafos completos H_0, H_1, \dots, H_k tal que $|S| = k - 2$. Sejam H_1, \dots, H_k as componentes de $G' \setminus S$. Pelo Lema 1.2 as componentes H_1, \dots, H_k são também subgrafos completos de G' .

Se pelo menos S componentes de $G' \setminus S$ são ímpares, então facilmente se encontrará um emparelhamento perfeito de G' , contrariando o facto de G' ser quase-saturado. Já $G' \setminus S$ tem pelo menos $S + 1$ componentes ímpares, de facto teria que ter pelo menos $S + 2$ componentes ímpares. Se $G' \setminus S$ contiver mais do que $S + 2$ componentes ímpares, poder-se-á averiguar que ao adicionar-se uma aresta extra a G' , que une duas componentes ímpares, o grafo resultante continuará a não conter um emparelhamento perfeito, o que é uma contradição.

Similarmente, se $G' \setminus S$ contiver uma componente par, então qualquer aresta que a une a outra componente de $G' \setminus S$ pode ser adicionada sem criar um emparelhamento perfeito, que contradiz o facto de G' ser quase-saturado.

Para finalizar a prova, remova-se de G' as arestas adicionadas a G e observe-se que cada componente ímpar de $G' \setminus S$ origina pelo menos uma componente ímpar de $G \setminus S$. Como $Odd(G \setminus S) > |S|$, o resultado segue-se. ■

Podem ser encontrados mais resultados de polígonos e grafos em [3], [6], [7], [21] e [54].

Capítulo 2

Decomposição de Polígonos

O problema de decompor um polígono tem numerosas aplicações em Geometria Computacional. Neste capítulo, o objecto de estudo será a decomposição de polígonos, com ou sem buracos, em triângulos e em quadriláteros convexos. Finalmente será apresentado um algoritmo para decompor um polígono ortogonal em peças da forma *L-shape*. Para uma melhor compreensão da decomposição de polígonos, inicia-se este capítulo com a introdução de algumas definições de cobertura, partição, triangulação e quadrilaterização.

Definição 2.1 *Cobertura de um polígono P é uma colecção de subpolígonos cuja reunião é exactamente P , (ver figura 2.1(a)).*

Definição 2.2 *Partição de um polígono P é uma cobertura de P em que os subpolígonos são disjuntos dois a dois, (ver figura 2.1(b)).*

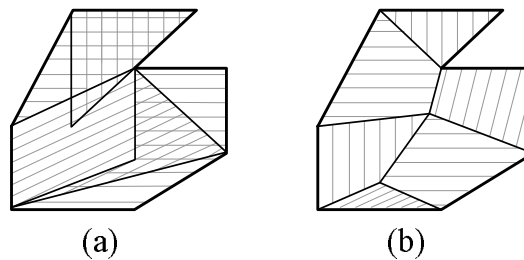


Figura 2.1: (a) Exemplo duma cobertura; (b) Exemplo duma partição.

Uma das partições mais usual designa-se por *triangulação*.

Definição 2.3 *Triangulação de um polígono P é uma partição de P em que os subpolígonos são triângulos disjuntos dois a dois.*

Como já foi referido, os polígonos ortogonais desempenham um papel fundamental na Geometria Computacional. Deste modo, será estudada uma partição para polígonos ortogonais: a quadrilaterização convexa. Este tipo de cobertura não é exclusiva para polígonos ortogonais embora neste estudo apenas se evidenciará a estes.

Definição 2.4 *Quadrilaterização convexa de um polígono P é uma partição de P em que os subpolígonos são quadriláteros convexos disjuntos dois a dois.*

2.1 Triangulação

Muitos algoritmos para polígonos iniciam com a decomposição destes em triângulos. A prova do Teorema da Galeria de Arte também recorre à triangulação de polígonos. Neste subcapítulo será provado que qualquer polígono simples admite pelo menos uma triangulação. Também se demonstrará que, mesmo que um polígono admita mais do que uma triangulação, o número de triângulos mantém-se.

Definição 2.5 *Seja P um polígono e sejam u e v dois vértices não adjacentes de P . O segmento de recta $[uv]$, é uma diagonal de P , se estiver totalmente contido em P .*

Diz-se que duas diagonais distintas, $[uv]$ e $[wx]$ de P , se cruzam se a intersecção entre elas for um ponto distinto dos seus extremos, i.é, $[uv] \cap [wx] \not\subset \{u, v, w, x\}$. Se traçarmos o maior número possível de diagonais que não se cruzam duas-a-duas, obteremos uma *triangulação* de P , (ver figura 2.2(a)). Seja T uma triangulação de um polígono P . Tendo em conta a Definição 2.3, podemos concluir que as arestas dos triângulos de T ou são aresta ou são diagonais de P .

Um polígono também pode ser subdividido em triângulos à custa de pontos situados no seu interior. Estes pontos são designados por pontos de *Steiner* (ver figura 2.2(c)). A árvore dual duma triangulação é uma árvore que tem um nó para cada triângulo, da triangulação, e um arco entre cada par de nós que pertencem a triângulos adjacentes por uma mesma diagonal, (ver figura 2.2(b)).

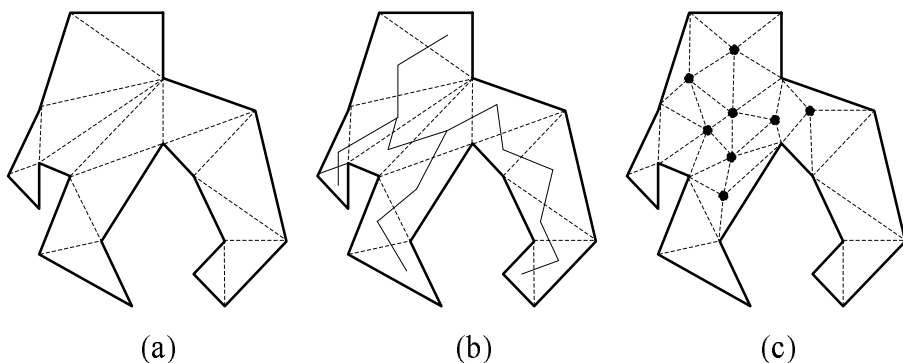


Figura 2.2: (a) Exemplo de um polígono e uma das suas triangulações; (b) da árvore dual da triangulação; (c) e de uma triangulação à custa de pontos de Steiner.

Lema 2.1 (Meister.) *Todo o polígono com pelo menos quatro vértices possui uma diagonal.*

Prova: Seja P um polígono com $n \geq 4$ vértices e seja v um vértice estritamente convexo de P . Sejam u e w vértices adjacentes a v . Se $[uw]$ é uma diagonal do polígono a prova é trivial. Suponha-se, agora, que $[uw]$ não é uma diagonal de P , ou seja:

- (i) ou $[uw] \not\subset P$;
- (ii) ou $[uw] \subset P$ e $[uw] \cap \partial P \not\subset \{u, w\}$.

Como $n \geq 4$, então o triângulo de vértices v , u e w , denotado por $\triangle(v, u, w)$, contém pelo menos um vértice de P distinto de v , u e w . Seja t o vértice de P , em $\triangle(v, u, w)$, mais próximo de v ; onde a distância é medida ortogonalmente à recta que passa pelo

segmento $[uw]$. Logo, t é o primeiro vértice de P atingido quando se move a recta l , paralela a $[uw]$, de v na direcção de $[uw]$, (ver figura 2.3).

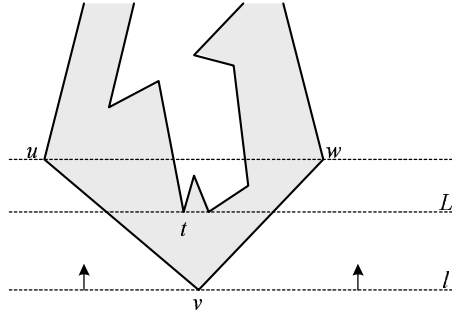


Figura 2.3: Ilustração do Lema 2.1.

Seja L a recta que passa por t e que é paralela ao segmento $[uw]$. A intersecção obtida pelo semi-plano delimitado por L e que contém o ponto v , com o triângulo $\triangle(u, v, w)$, não é mais do que um triângulo que não contém nenhum ponto de ∂P no seu interior. Assim, o segmento $[vt]$ está totalmente contido em P e não é aresta de P , ou seja, $[vt]$ é diagonal de P . ■

Teorema 2.1 (Triangulação) *Todo o polígono admite pelo menos uma triangulação.*

Prova: Seja P um polígono. A prova será feita por indução sobre o número de n vértices do polígono P . Se $n = 3$, o polígono será um triângulo e a demonstração é trivial.

Considere-se $n \geq 4$. Pelo Lema de Meister, P possui uma diagonal d . Seja A uma partição de P construída à custa de d . Obtém-se, assim, dois polígonos P_1 e P_2 , com menos de n vértices e com a aresta d em comum. Aplicando a hipótese de indução, cada um dos polígonos obtidos admite uma triangulação. Logo, combinando as triangulações de cada um dos polígonos com d obtém-se uma triangulação de P , (ver figura 2.4). ■

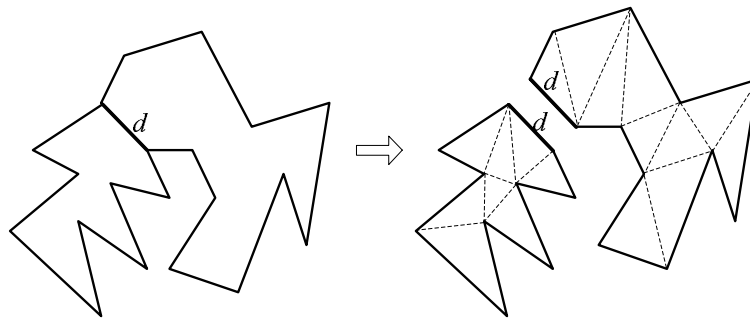


Figura 2.4: Ilustração da prova do Teorema 2.1.

Observação: Do Teorema anterior conclui-se que um polígono P admite no mínimo uma triangulação. A figura 2.5 ilustra dois polígonos, um que admite apenas uma triangulação e um que admite mais do que uma.

Lema 2.2 (Número de diagonais) *Toda a triangulação de um polígono de n vértices admite $(n - 3)$ diagonais e $(n - 2)$ triângulos.*

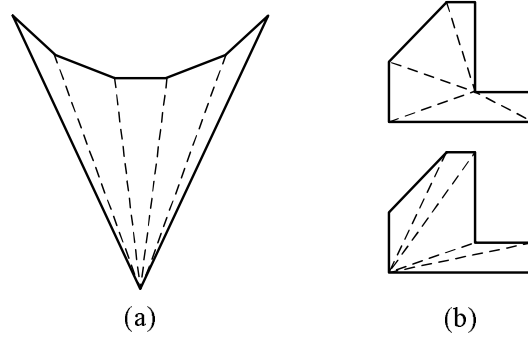


Figura 2.5: (a) Polígono que admite apenas uma triangulação; (b) Polígono que admite mais do que uma triangulação.

Prova: Seja P um polígono com n vértices. Prove-se o lema por indução sobre o número n de vértices de P . As afirmações enunciadas no lema são verdadeiras para $n = 3$, ou seja, para um triângulo.

Considere-se $n \geq 4$. Construa-se uma partição de P em dois polígonos P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d . Suponha-se que P_1 admite n_1 vértices e que P_2 admite n_2 vértices. Assim, obtém-se a seguinte igualdade $n_1 + n_2 = n + 2$.

Aplicando a hipótese de indução ao polígono P_i , $i = 1, 2$, tem-se que toda a triangulação de P_i possui $(n_i - 3)$ diagonais. Toda a triangulação de P , que possui d , induz triangulações de P_1 e P_2 . Assim, toda a triangulação de P , que possui d , tem

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n_1 + n_2 - 5 = n + 2 - 5 = n - 3$$

diagonais. Como a escolha de d foi arbitrária, podemos concluir que toda a triangulação de P possui $n - 3$ diagonais. O número de triângulos é claramente um a mais que o número de diagonais. ■

Lema 2.3 (soma dos ângulos) *A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.*

Prova: Pelo Lema 2.2, existem $(n - 2)$ triângulos numa triangulação dum polígono com n vértices e cada triângulo contribui com π para a soma dos ângulos internos. ■

Definição 2.6 *Sejam u, v e w três vértices consecutivos dum polígono P , se $[uw]$ for uma diagonal de P então diz-se que os vértices u, v e w formam uma orelha de P . Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores forem disjuntos, (ver figura 2.6).*

Teorema 2.2 (Teorema das Duas Orelhas de Meister) *Todo o polígono com um mínimo de 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.*

A figura 2.6 ilustra dois polígonos, um com exactamente duas orelhas e outro com mais de duas orelhas. A prova do Teorema 2.2 segue da prova do seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P . Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P .*

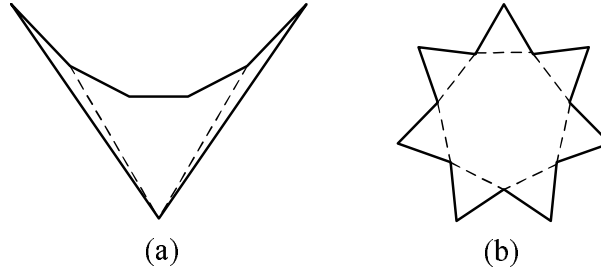


Figura 2.6: (a) Polígono com exactamente duas orelhas; (b) Polígono com sete orelhas.

Prova: A prova é feita por indução sobre o número de vértices n de P . Se $n = 4$ então P é um quadrilátero e os dois triângulos de T são orelhas de P .

Suponha-se que $n \geq 5$. Construa-se uma partição de P em dois polígonos P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d de T . Sejam T_1 e T_2 as triangulações de P_1 e P_2 , respectivamente, obtidas através da restrição da triangulação T a P_1 e P_2 . Pela hipótese de indução, cada um dos polígonos P_1 e P_2 possuem duas orelhas formadas por triângulos de T_1 e T_2 , respectivamente. A diagonal d não faz parte de pelo menos um triângulo de T_1 que forma uma orelha de P_1 e, conseqüentemente, esse triângulo também forma uma orelha de P . Analogamente, pelo menos um dos triângulos de P_2 forma uma orelha de P .

Como estes triângulos são disjuntos, a prova do teorema está completa. A prova está ilustrada na figura 2.7. ■

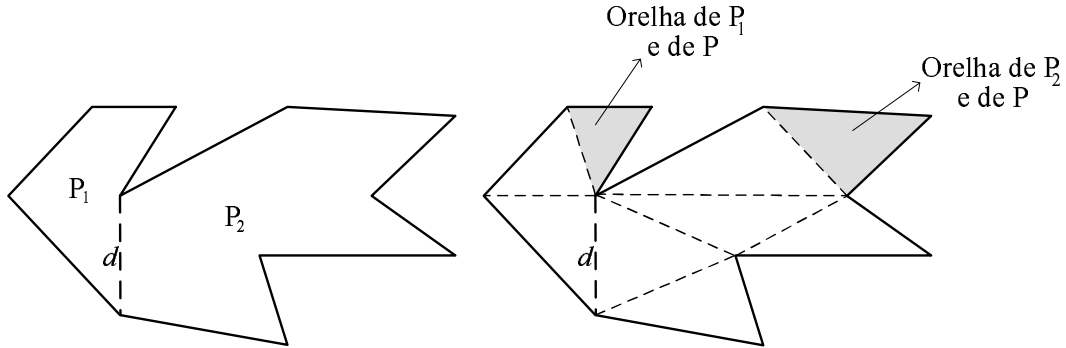


Figura 2.7: Ilustração da prova do Teorema 2.3.

Definição 2.7 Associa-se um grafo planar $G_T = (V, E)$ à triangulação T dum polígono P da seguinte forma: o conjunto dos vértices V de G_T é o conjunto dos vértices de P e existe sempre uma aresta de E que liga os vértices u e v de G_T , caso o segmento $[uv]$ faça parte da triangulação T , (ver figura 2.8(b)). G_T designa-se por grafo dual.

Teorema 2.4 Seja G_T um grafo associado a uma triangulação T dum polígono P . Então G_T é 3-colorível.

Prova: A prova é feita por indução sobre o número de vértices n de G_T . É trivial que um triângulo é 3-colorível. Supondo que $n \geq 4$. Pelo Teorema 2.3, P tem uma orelha

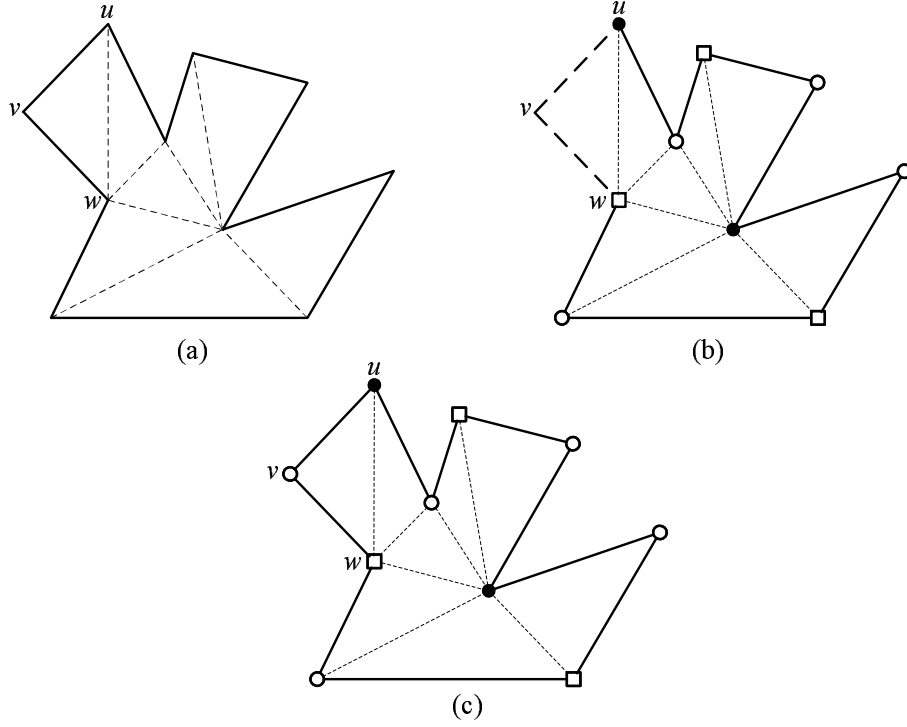


Figura 2.8: (a) Polígono P , (b) Grafo associado a uma triangulação de P' e uma 3-coloração de $G_{T'}$, (c) uma 3-coloração de G_T .

formada por um triângulo $\triangle(u, v, w)$ de T . Seja P' o polígono obtido, a partir de P , através da remoção desta orelha (ver figuras 2.8(a) e (b)), e seja T' a triangulação de P' , obtida a partir de T , através da remoção de $\triangle(u, v, w)$. O polígono P' tem $(n - 1)$ vértices e, pela hipótese de indução, o grafo $G_{T'}$ é 3-colorível. O grafo G_T pode ser obtido a partir de $G_{T'}$ simplesmente adicionando o vértice v e as arestas $[uv]$ e $[vw]$. Logo, existe uma forma de estender a 3-coloração de $G_{T'}$ a uma 3-coloração de G_T , basta colorir v com uma cor diferente das atribuídas a u e w , (ver figura 2.8(c)). ■

2.2 Quadrilaterização Convexa de Polígonos Ortogonais

A quadrilaterização convexa de polígonos ortogonais possui importância comparável à da triangulação para polígonos não ortogonais. Tal como no subcapítulo anterior, provar-se-á que qualquer polígono ortogonal admite uma quadrilaterização convexa. Este resultado foi obtido por Lubiw [30] recorrendo a polígonos *1-ortogonais*.

O'Rourke [37] estabeleceu uma relação entre o número de ângulos reflexos e o número de vértices dum polígono ortogonal.

Lema 2.4 *Seja P um polígono ortogonal com n vértices, dos quais r são reflexos. Então $r = \frac{n-4}{2}$.*

Prova: Como P tem n vértices, a soma das amplitudes dos ângulos internos de P é exactamente $(n - 2)\pi$, pelo Lema 2.3. Como P é ortogonal todos os seus ângulos

internos têm amplitudes $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

Considere-se que P tem r vértices reflexos e $n - r$ vértices não reflexos, então:

$$\frac{\pi}{2}(n - r) + \frac{3\pi}{2}r = (n - 2)\pi \iff r = \frac{n-4}{2} \quad \blacksquare$$

Dado um polígono ortogonal P , rotula-se de forma natural as suas arestas de:

- *topo* (T): aresta horizontal cujo interior do polígono se encontra abaixo desta.
- *base* (B): aresta horizontal cujo interior do polígono se encontra acima desta.
- *direita* (D): aresta vertical cujo interior do polígono se encontra à esquerda desta.
- *esquerda* (E): aresta vertical cujo interior do polígono se encontra à direita desta.

Um vértice reflexo de P designa-se por *topo-esquerdo* (TE) caso as arestas que o formam sejam de topo e de esquerda. Da mesma forma se definem os ângulos reflexos: *topo-direita* (TD), *base-direita* (BD) e *base-esquerda* (BE), (ver figura 2.9).

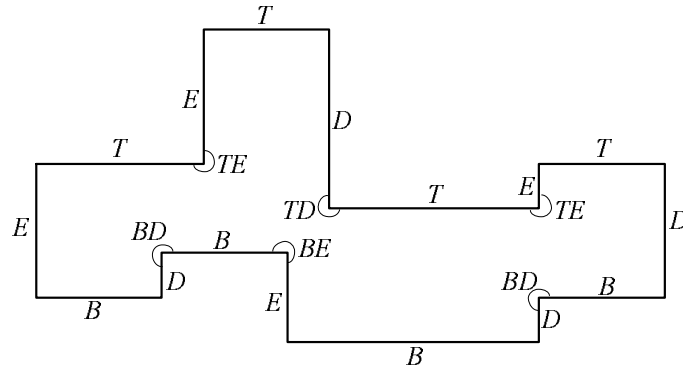


Figura 2.9: Classificação das arestas e dos vértices reflexos dum polígono ortogonal.

Como já foi referido, uma quadrilaterização dum polígono ortogonal P é uma partição de P formada por um conjunto de quadriláteros convexos tal que as arestas desses quadriláteros são arestas ou diagonais de P , (ver figura 2.10).

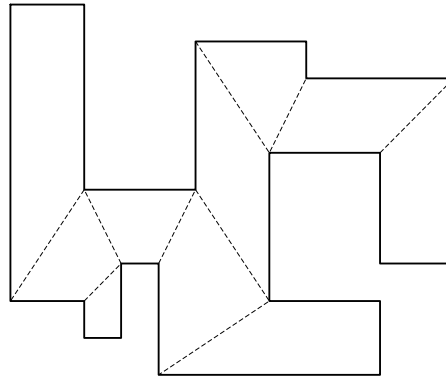


Figura 2.10: Quadrilaterização dum polígono ortogonal.

Definição 2.8 O nariz de uma aresta oblíqua e de P , é um triângulo rectângulo T , que se forma no interior de P tal que:

- (i) a hipotenusa de T é e ;
- (ii) os catetos de T são paralelos aos eixos coordenados, (ver figura 2.11).

Definição 2.9 Um polígono ortogonal P , diz-se 1-ortogonal se obedecer às seguintes regras:

- (i) todas as arestas de P , com excepção de, no máximo, uma aresta oblíqua denotada por e , são paralelas aos eixos coordenados;
- (ii) com a possível excepção da aresta e , as arestas alternam entre horizontal e vertical;
- (iii) os ângulos internos admitem como amplitude um valor menor ou igual a $\frac{3\pi}{2}$;
- (iv) o interior do nariz duma aresta oblíqua não contém vértices de P ;
- (v) P tem um número par de arestas.

(ver figura 2.11)

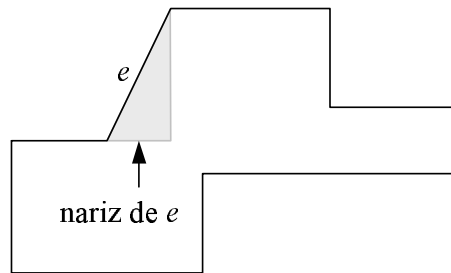


Figura 2.11: Nariz da aresta e , polígono 1-ortogonal.

Nota: Quando P for ortogonal, a aresta e deve ser escolhida entre uma das arestas de P . Repare-se que um polígono ortogonal também é 1-ortogonal.

Encontram-se reunidas as condições para provar o resultado de Lubiw [30]:

Teorema 2.5 Qualquer polígono P 1-ortogonal admite uma quadrilaterização convexa.

Prova: Se o polígono P tiver 4 arestas é obrigatoriamente convexo, para este caso a prova é trivial. Seja P um polígono 1-ortogonal com mais de 4 arestas, pretende-se provar que existe sempre uma quadrilaterização Q' que decompõe P em polígonos 1-ortogonais. Prove-se por indução.

Sem perda de generalidade, considere-se que a inclinação da aresta e toma valores entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Sejam u e v os vértices da aresta e , de forma a que u seja o de menor ordenada. Seja w o terceiro vértice do nariz T de e . Como por definição, P tem um número par de arestas e todos os seus ângulos internos têm no máximo amplitude $\frac{3\pi}{2}$, então ambas as arestas adjacentes a e são horizontais. Seja e' a aresta horizontal de P que precede e , no sentido dos ponteiros do relógio, ao longo da fronteira de P . Pretende-se agora

descobrir os quatro vértices de Q' . Os primeiros dois vértices de Q' são u e v . Seja e'' um segmento de recta que une v a w e que é aberto em w . Desloque-se e'' para a direita até atingir um vértice de P .

Se e'' atingir toda uma aresta de P , então os extremos dessa aresta juntamente com os vértices u e v serão os quatro vértices de Q' .

Se e'' atingir um vértice x de P , x é o terceiro vértice de Q' . Para determinar o quarto vértice de Q' , considere-se o segmento de recta semi-aberto horizontal h , que une u à linha vertical que passa por x , aberto em u e fechado no seu extremo direito. Deslize-se h até encontrar um vértice de P ou atingir o ponto médio de uma aresta horizontal f de P .

No primeiro caso, seja y o vértice mais à direita que h atinge. O quarto vértice de Q' é y . Este caso está ilustrado na figura 2.12.

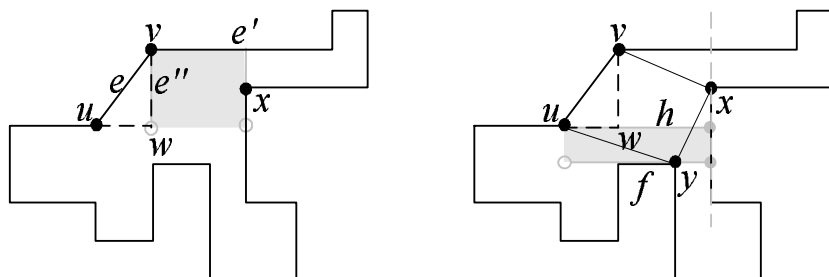


Figura 2.12: Encontrar Q' no caso 1.

No segundo caso, em que h atinge a aresta f de P , obtém-se quando x é o extremo direito de e' . Este caso está ilustrado na figura 2.13.

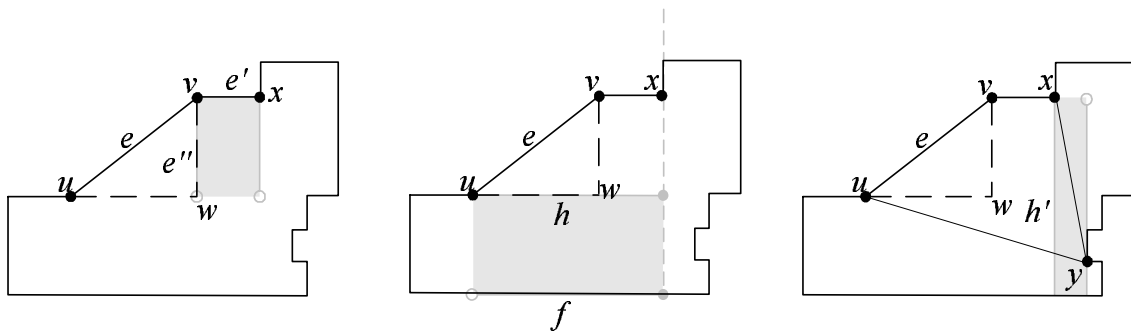


Figura 2.13: Encontrar Q' no caso 2.

Considere-se o segmento de recta h' , semi-aberto e vertical, que une x a f , fechado na base e aberto no topo. Deslize-se h' para a direita até atingir um vértice de P . Se atingir mais do que um vértice, escolhe-se y o de menor ordenada para ser o último vértice de Q' .

É fácil observar que, para ambos os casos, se poderá dividir $P \setminus Q'$ em dois ou três polígonos 1-ortogonais. ■

Tendo em conta a nota da Definição 2.9, é fácil concluir que um polígono ortogonal é também 1-ortogonal. Consequentemente, a prova do teorema anterior é válida para o seguinte:

Teorema 2.6 *Qualquer polígono ortogonal admite uma quadrilaterização convexa.*

O lema que se segue estabelece uma relação entre o número q , de quadriláteros obtidos da quadrilaterização do polígono, e o número n de vértices do polígono.

Lema 2.5 *Para qualquer quadrilaterização de um polígono ortogonal com n vértices e q quadriláteros tem-se $n = 2q + 2$.*

Prova: A soma dos ângulos internos dum polígono ortogonal com n vértices é $(n - 2)\pi$ radianos. Como existem q quadriláteros e a soma dos ângulos internos de cada quadrilátero é 2π radianos então, $2\pi q = (n - 2)\pi \Leftrightarrow n = 2q + 2$. ■

Lema 2.6 *Seja P um polígono ortogonal e Q uma quadrilaterização de P . Existe uma diagonal d em Q que particiona P em duas peças. Uma das peças contém $q = 2, 3$ ou 4 quadriláteros de Q .*

Prova: Escolha-se d como sendo uma diagonal de Q que separa um número mínimo de quadriláteros, ou seja, pelo menos dois. Neste caso diz-se que d corta fora um número mínimo de quadriláteros. Seja $q \geq 2$ este mínimo. Seja $[vuxy]$ o quadrilátero de base $d = [vu]$ em relação à peça com q quadriláteros, (ver figura 2.14).

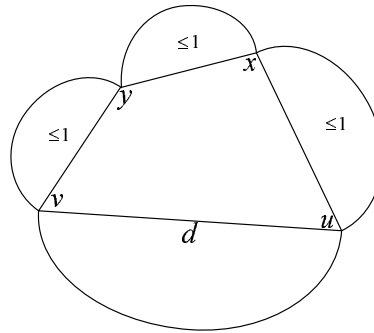


Figura 2.14: A diagonal d corta fora um número mínimo de quadriláteros isto é pelo menos dois.

O número de quadriláteros nas regiões limitadas por $[ux]$, $[xy]$ e $[yv]$, ilustradas na figura, é menor ou igual a 1. Caso contrário q não seria minimal. Consequentemente, $q \leq 4$. ■

A construção do dual de uma quadrilaterização é idêntica à do dual de uma triangulação: considera-se que cada quadrilátero da quadrilaterização de Q é um nó de um grafo Q^* , dois nós são adjacentes em Q^* se os seus correspondentes quadriláteros em Q partilharem a mesma diagonal. O lema que se segue é imediato.

Lema 2.7 *Para qualquer quadrilaterização Q , dum polígono ortogonal, o dual Q^* é uma árvore e cada vértice tem no máximo grau 4.*

Definição 2.10 *Um corte L , horizontal ou vertical, dum polígono ortogonal P , é uma extensão de uma aresta, horizontal ou vertical, que passa pelo interior de P até atingir a fronteira de P .*

De acordo com a Definição 2.10, podemos concluir que L contém uma aresta de P e que passa pelo menos por um vértice reflexo de P , (ver figura 2.16).

Definição 2.11 *Um corte, horizontal ou vertical, designa-se por corte ímpar se dividir P em dois polígonos não vazios P_1 e P_2 com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, tal que pelo menos n_1 ou n_2 é igual a $4k + 2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, (ver figura 2.15).*

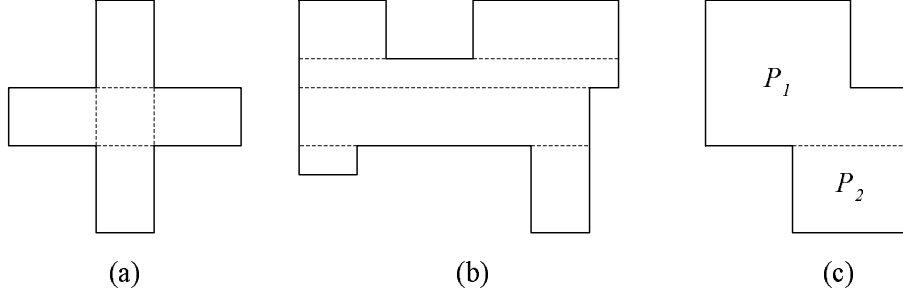


Figura 2.15: Exemplo de polígonos: (a) que não admite cortes-ímpares, (b) que não admite cortes-ímpares horizontais, (c) que admite um corte-ímpar horizontal ($n_1 = 6$).

Denote-se por H-corte e por V-corte os cortes-ímpares horizontais e verticais, respectivamente.

Dependendo se P contém um ou dois ângulos reflexos, o segmento L particiona P em duas ou três peças, (ver figura 2.16).

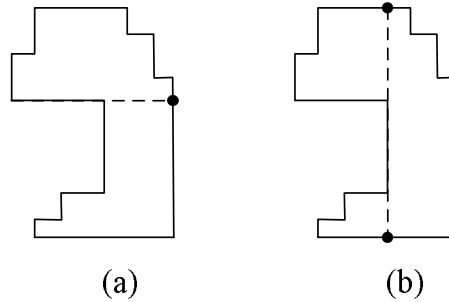


Figura 2.16: Um corte que particiona um polígono em duas (a) ou três (b) peças.

Lema 2.8 *A soma do número de quadriláteros das peças, obtidas por um corte L de P , é igual ao número de quadriláteros numa quadrilaterização de P .*

Prova: Suponha-se que L particiona P em duas peças P_1 e P_2 como na figura 2.16(a). Considere-se que P , P_1 e P_2 têm n , n_1 e n_2 vértices e que as suas quadrilaterizações admitem q , q_1 e q_2 quadriláteros, respectivamente. Como L introduz dois vértices, um em P_1 e um em P_2 , então $n_1 + n_2 = n + 2$. O Lema 2.5 mostra que:

$$q_1 + q_2 = \frac{n_1 - 2}{2} + \frac{n_2 - 2}{2} = \frac{n - 2}{2} = q$$

Se L particiona P em três peças, como na figura 2.16(b), então L pode ser considerado como uma combinação de dois “meio” cortes, um para cada vértice reflexo. A primeira partição divide P em duas peças, a segunda partição uma das peças em duas, resultando em três peças. Aplicando o resultado estabelecido para duas peças o lema verifica-se para três peças. ■

2.3 Decomposição de Polígonos com Buracos

O'Rourke [37] provou que qualquer polígono P com buracos admite pelo menos uma triangulação e Lubiw [30] provou que P também admite uma quadrilaterização convexa. Para além destas provas, este subcapítulo contém uma relação entre o número de vértices e de buracos dum polígono com o número de triângulos (resp. quadriláteros) duma triangulação (resp. quadrilaterização) de P .

Teorema 2.7 *Um polígono P com n vértices e com h buracos admite pelo menos uma triangulação.*

Prova: Seja P um polígono com h buracos e n vértices. A prova é feita por indução, primeiramente sobre h e depois sobre n . O Lema 2.2 estabelece a base da indução para $h = 0$. Para o caso geral, seja d uma diagonal de P cuja existência pode ser garantida pelo seguinte argumento: escolha-se arbitrariamente um vértice convexo v_2 , admita-se para vértices adjacentes v_1 e v_3 da fronteira externa de P e considere-se $d = [v_1v_3]$ se esta for interna, (ver figura 2.17(a)); caso contrário, seja $d = [v_2x]$, sendo x o vértice mais perto de v_2 tirado por uma perpendicular a $[v_1v_3]$.

Se um dos extremos de d estiver num dos buracos, então acresce 2 a n e retira 1 a h . Se d tiver ambos os extremos na fronteira exterior de P , constrói-se uma partição de P em dois polígonos P_i com $n_i < n$ vértices e com $h_i \leq h$ buracos, $i = 1, 2$, (comparar figuras 2.17(a) e (b)). Em ambos os casos, a hipótese de indução aplica-se validando o Teorema, (ver figura 2.17).■

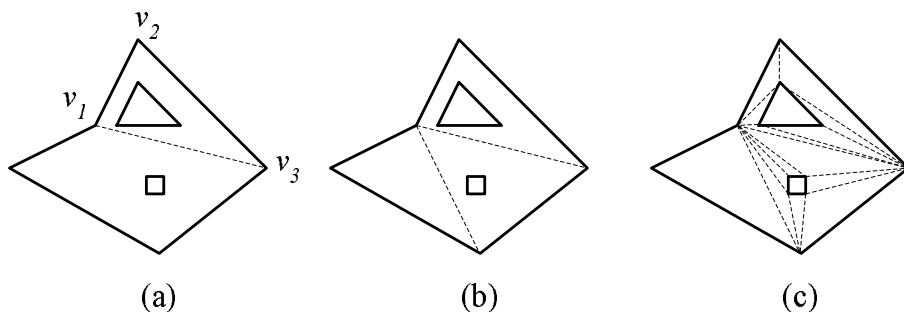


Figura 2.17: Construção duma triangulação num polígono com buracos.

Pretende-se agora provar que um polígono ortogonal com buracos também admite uma quadrilaterização convexa. Sabe-se que o dual dum polígono com buracos não é uma árvore, consequentemente, a remoção de um quadrilátero pode introduzir mais do que uma aresta oblíqua no polígono resultante. Por exemplo, remover um quadrilátero do polígono ilustrado na figura 2.18 introduz duas arestas oblíquas. Assim, a classe dos polígonos 1-ortogonais não é suficiente para provar a afirmação.

Definição 2.12 *Seja e uma aresta não vertical dum polígono P . A sombra da aresta e é a projecção horizontal de e em P , ou seja, é o conjunto de pontos de P que são visíveis de e por uma linha horizontal, não incluindo os extremos de e , (ver figura 2.19).*

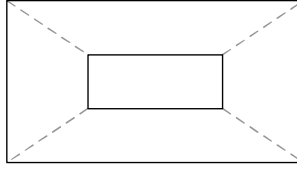


Figura 2.18: A remoção de qualquer quadrilátero introduz duas arestas oblíquas.

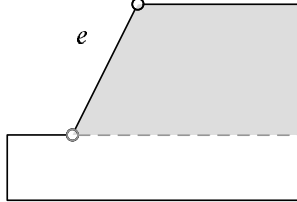


Figura 2.19: A Sombra duma aresta.

É fácil verificar que as arestas horizontais não têm sombra visto que $S = \emptyset$. Lubiw [30] provou que qualquer polígono ortogonal com buracos é quadrilaterizável recorrendo a polígonos “pseudo-ortogonais”:

Definição 2.13 Diz-se que um polígono P é pseudo-ortogonal se satisfazer as três condições seguintes, (ver figura 2.20):

- (1) As arestas de P são alternadamente verticais e não verticais (a arestas horizontais são não verticais);
- (2) Todos os ângulos internos de P têm amplitude menor ou igual a $\frac{3\pi}{2}$;
- (3) A sombra de qualquer aresta não vertical de P não contém vértices de P , (ver figura 2.19).

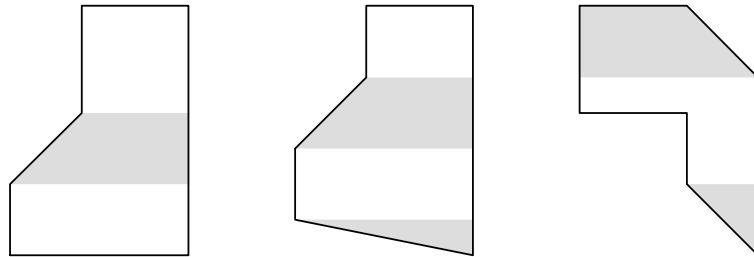


Figura 2.20: Exemplo de polígonos pseudo-ortogonais

Tendo em conta a Definição 2.13, podemos concluir que qualquer polígono ortogonal (com ou sem buracos) é pseudo-ortogonal.

Teorema 2.8 Um polígono P pseudo-ortogonal admite uma quadrilaterização convexa.

Prova: A prova faz-se por indução sobre o número de arestas. Se P tiver quatro arestas então por (1) duas são obrigatoriamente verticais. Independentemente de qual seja o declive das arestas não verticais, P é convexo.

Se P tem mais de quatro arestas, pretende-se provar que podemos remover um quadrilátero de P : removendo este obtém-se polígonos mais pequenos também pseudo-ortogonais. Com este propósito, defina-se por *vizinho de cima* dum vértice v , o vértice u , tal que

- (i) u é visível de v ,
- (ii) u tem ordenada superior a v ,
- (iii) u é o vértice de menor ordenada que está o mais à direita possível de v ,
- (iv) u não está ligado a v por uma aresta não vertical,
- (v) se v pertencer a uma aresta de topo u coincidirá com v .

Nem todos os vértices têm vizinho de cima, por exemplo, um vértice convexo topo-direita.

Considere-se o quadrilátero a remover. Para esta prova utilizar-se-á a seguinte notação: $x < y$ para designar que x tem menor ordenada que y ou, caso estejam à mesma altura, que x está à direita de y . Seja $[ab]$ com $a < b$ uma aresta de base e seja c o vizinho de cima de b . Se c pertencer a uma aresta de topo $[cd]$, então $[ab]$ e $[cd]$ definem um quadrilátero removível.

Prove-se que este quadrilátero existe em qualquer circunstância. Para iso é preciso provar que b admite sempre um vizinho de cima. Se $[ab]$ não é horizontal, então a aresta vertical incidente em b deve estar acima de b , para satisfazer a condição (2), (ver figuras 2.21(a) e (b)).

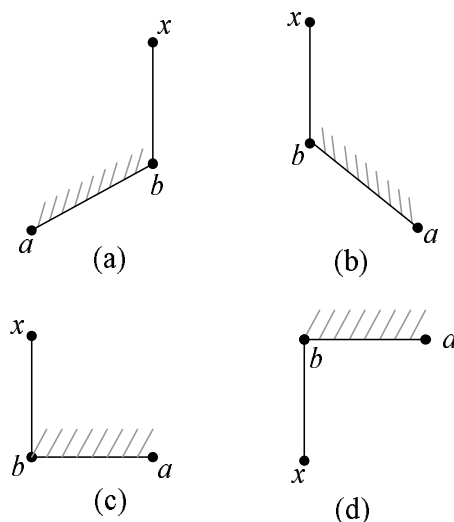


Figura 2.21: O vértice b admite sempre um vizinho de cima (o tracejado representa o interior do polígono).

O outro extremo da aresta garante a existência de um vizinho de cima de b . Se $[ab]$ for horizontal, então b estará à esquerda. Se o ângulo em b for convexo (ver figura 2.21(c))

a situação será a mesma que a anterior. Se o ângulo for reflexo (ver figura 2.21(d)), obrigatoriamente, existirão pelo menos dois vértices acima e visíveis de b e, de novo, b admitirá um vizinho de cima.

Ainda para provar a existência do quadrilátero, devemos mostrar que existe uma aresta $[ab]$, definida da mesma forma que anteriormente, em que o vizinho de cima de b pertence a uma aresta de topo. Seja $[ab]$ com $a < b$ a aresta de base com b máximo, entre todas as arestas em relação a “ $<$ ”. Assim, b é o vértice de maior ordenada considerando todas as aresta de base. Consequentemente, o vizinho de cima de b , i.e, c , não pode pertencer a uma aresta de base. Pela condição (1), em cada vértice incide uma aresta de topo ou de base (i.e, não vertical), então c pertence a uma aresta de topo.

Provada a existência do quadrilátero falta demonstrar que este é removível. Seja A o conjunto de pontos contidos verticalmente entre b e c , excluindo os que estão à direita de b e à esquerda de c , como ilustra a figura 2.22.

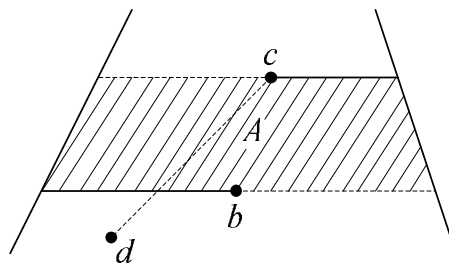


Figura 2.22: A região A entre b e o seu vizinho de cima c .

Como c é o vizinho de cima de b , a região A não contém vértices. Seja d o outro extremo da aresta que contém c . Se $d < c$, então $d < b$ para que d não pertença a A . Mas assim, b pertencerá à sombra de $[dc]$ contrariando a condição (3). Deste modo, $c < d$. Isto conduz a quatro casos, como ilustra a figura 2.23.

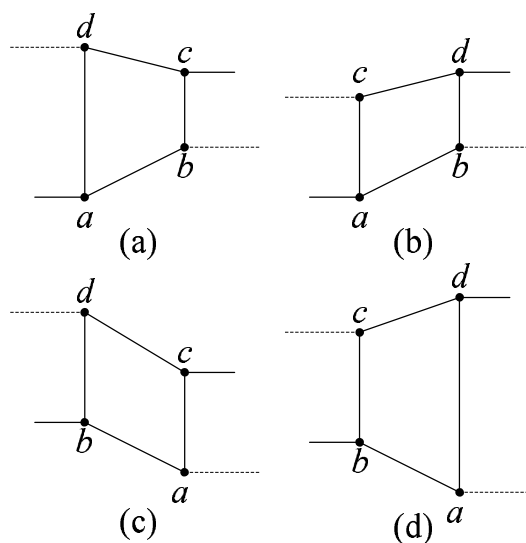


Figura 2.23: O quadrilátero removível e todas as suas orientações. As arestas a cheio e a tracejado representam a fronteira fechada e aberta de B .

Seja B a intersecção de A com as sombras de $[ab]$ e $[cd]$. Então B é vazio e, consequentemente, os quadriláteros ilustrados na figura são internos a P .

Agora demonstre-se que o quadrilátero removível é convexo. Se $[ab]$ não for horizontal, então o ângulo em a terá amplitude inferior a π e o ângulo em b também terá amplitude inferior a π , porque a aresta vertical incidente em b deve estender-se ascendentemente para satisfazer (2). Se $[ab]$ for horizontal, então ambas as amplitudes dos ângulos serão inferiores a π , já que c e d estão os dois acima de $[ab]$. Argumentos exactamente análogos mostram que as amplitudes dos ângulos em c e d são inferiores a π , deste modo o quadrilátero é convexo.

Remover o quadrilátero introduz duas arestas não verticais independentemente de qual seja o caso (ilustrados na figura 2.23). Note-se que, em qualquer um dos casos, as sombras dessas arestas, não verticais, pertencem a B e, consequentemente, são vazias, satisfazendo a condição (3). Como há arestas verticais incidentes em a, b, c e d , a alternância entre vertical e não vertical é mantida (1). Finalmente, como os ângulos têm amplitude menor ou igual a $\frac{3\pi}{2}$, estes foram subdivididos pela remoção, a condição (2) continua assegurada. Assim, o polígono obtido pela remoção do quadrilátero é pseudo-ortogonal. Repetindo sucessivamente este procedimento obtém-se sempre peças pseudo-ortogonais. Aplicando a hipótese de indução a essas peças e unindo as quadrilaterizações resultantes com o quadrilátero removido, obtém-se uma quadrilaterização de P . ■

A figura 2.24 ilustra um exemplo duma aplicação repetida, do Teorema 2.8, num polígono ortogonal com dois buracos.

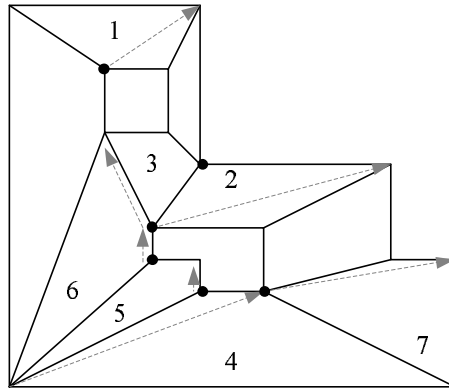


Figura 2.24: Quadrilaterização obtida pela repetida eliminação de quadriláteros. Os quadriláteros estão numerados pela ordem em que são removidos. As setas a tracejado representam a relação entre vizinho de cima.

O número de triângulos e o número de quadriláteros, resultantes duma triangulação e duma quadrilaterização, dependem do número de buracos existentes no polígono. O'Rourke [37] chegou ao seguinte resultado:

Lema 2.9 *Seja P um polígono com h buracos e n vértices, tendo em conta os vértices dos buracos bem como os que estão na fronteira externa de P . Então uma triangulação de P admite $t = n + 2h - 2$ triângulos e uma quadrilaterização admite $q = \frac{n}{2} + h - 1$ quadriláteros.*

Prova: Admita-se que a fronteira externa de P tem n_0 vértices e que cada H_i buraco tem n_i vértices, $i = 1, \dots, h$. Tem-se então que, $n = n_0 + n_1 + \dots + n_h$. A soma dos ângulos internos da fronteira externa de P é $(n_0 - 2)\pi$ radianos e a soma dos ângulos externos de H_i é $(n_i + 2)\pi$ radianos. Então,

$$\pi[(n_0 - 2) + (n_1 + 2) + \dots + (n_h + 2)] = \pi t$$

ou $t = n + 2h - 2$. Como $q = \frac{t}{2}$ então $q = \frac{n}{2} + h - 1$. ■

2.4 Decomposição de Polígonos Ortogonais em Polígonos *L-shape*

Nesta secção, o objectivo é apresentar um algoritmo $O(n \ln n)$ que constrói uma partição dum polígono ortogonal em polígonos *L-shape*. Os resultados apresentados neste subcapítulo devem-se a O'Rourke [37].

Definição 2.14 *Um polígono ortogonal com seis vértices designa-se por L-shaped, (ver figura 2.25).*

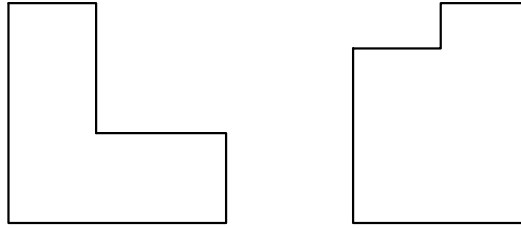


Figura 2.25: Polígonos *L-shape*

Definição 2.15 *Dois vértices reflexos de P , u e w , formam um par horizontal se forem vértices de uma aresta horizontal de P . Um vértice reflexo v de P diz-se H-isolado se o segundo vértice, da aresta horizontal incidente em v , for convexo, (ver figura 2.26).*

Definição 2.16 *Uma partição designa-se por H-partição π de P se for obtida através de H-cortes em todos os vértices reflexos de P que pertençam a um par horizontal, (ver figura 2.26).*

Definição 2.17 *Define-se por H-grafo da H-partição π de P , um grafo orientado onde o conjunto dos vértices é o conjunto formado pelas regiões da H-partição π de P , (ver figura 2.26).*

As arestas do H-grafo orientam-se da seguinte forma: considere-se que duas regiões X e Y são adjacentes se o H-corte que as separa for uma extensão duma aresta de P que está totalmente contida na fronteira de X , então as regiões ficarão ligadas por uma aresta orientada de X para Y , (ver figura 2.26).

Classifique-se os vértices do H-grafo de P da seguinte forma:

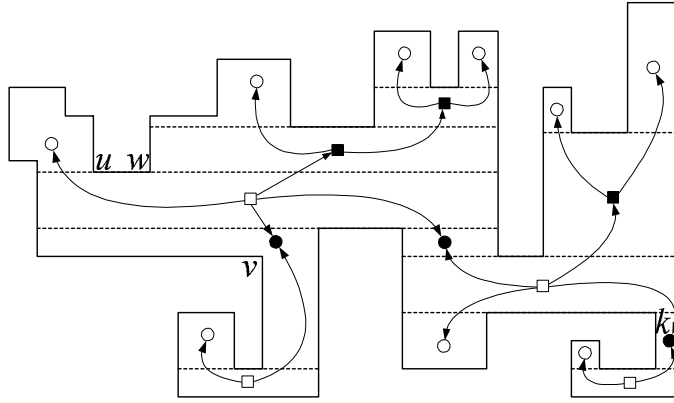


Figura 2.26: A H-partição π de P e o respectivo H-grafo.

- **nós de folhas:** vértices com grau de entrada igual a 1;
- **nós de poços:** vértices com grau de entrada igual a 2 e de saída igual a 0;
- **nós de raiz:** vértices com grau de saída igual a 2 ou 4;
- **nós de ramos:** vértices com grau de saída igual a 2 e de entrada igual a 1.

Na figura 2.26, os nós do grafo estão classificados tendo em conta as marcas referidas.

Lema 2.10 *Se o H-grafo de P contiver um poço então terá um corte ímpar.*

Prova: Seja k um poço de P . Sejam h o H-corte mais alto e h' o H-corte mais baixo que separam k dos seus vizinhos. Se k não contiver vértices H-isolados (por exemplo, o poço de menor ordenada do H-grafo representado na figura 2.26), um dos h ou h' será, obrigatoriamente, um corte-ímpar. Se k tiver um vértice H-isolado e h não for um corte-ímpar, então o mais alto vértice H-isolado v de k (por exemplo, o vértice v ilustrado na figura 2.26) originará um corte-ímpar, o resultado segue-se, (ver figura 2.27). ■

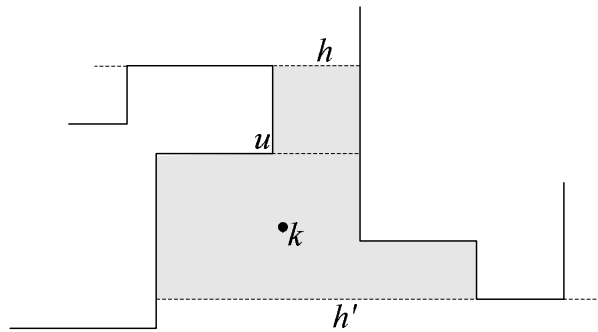


Figura 2.27: Encontrar um corte-ímpar num poço.

Lema 2.11 *Se um polígono P não admitir cortes-ímpares, então o H-grafo de P conterá uma única raiz. O polígono P admite exactamente um vértice H-isolado que está localizado na raiz do H-grafo de P .*

Prova: Considere-se que o H-grafo de um polígono P contém duas raízes. Então o caminho que as une conterá, obrigatoriamente, um poço (ao observar-se o H-grafo da figura 2.26, constatamos que o caminho que une duas raízes contém um poço). No entanto, visto que P não admite cortes-ímpares, o seu H-grafo não tem poços (Lema 2.10). Segue-se que o H-grafo de P contém uma única raiz, (ver figura 2.28).

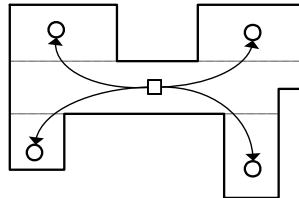


Figura 2.28: Polígono que não contém H-cortes ímpares e o seu H-grafo contém uma única raiz.

Como o H-grafo de P é uma árvore com uma única raiz, qualquer outro vértice da árvore tem grau de entrada igual a 1, ou seja, é uma folha. Seja k uma das regiões da H-partição de P . Como P não admite cortes-ímpares, o corte correspondente à aresta que limita k não é um corte-ímpar. Sem perda de generalidade, suponha-se que esta aresta é de topo para k . Então, se k admitir vértices H-isolados, o mais baixo origina um corte-ímpar, o que se traduz numa contradição, (ver prova do Lema 2.10).

No entanto, como P contém um número ímpar de vértices reflexos (caso contrário, qualquer H-corte será um corte ímpar) terá que conter no máximo um vértice H-isolado, este que se localizará na região da raiz da H-partição de P . Além disso, se a região raiz contiver mais do que um vértice H-isolado, um deles irá originar um corte-ímpar, resultando numa contradição. O resultado segue-se. ■

Nota: É óbvio que todos os resultados provados para H-cortes são válidos para V-cortes. Particularmente, se P não admitir cortes ímpares verticais, terá exactamente um vértice V-isolado localizado na raiz do seu V-grafo.

Lema 2.12 *Qualquer polígono ortogonal P que contém um número ímpar r de vértices reflexos admite um corte ímpar, $r \geq 3$.*

Prova: Suponha-se que P não contém cortes ímpares horizontais e verticais, então terá exactamente um vértice H-isolado u e um vértice V-isolado v . Sabe-se ainda que estes vértices estão localizados na raiz do H-grafo e na raiz V-grafo de P , respectivamente. Qualquer outro vértice de P pertencerá a um par horizontal ou vertical. No entanto, todos os vértices de P estão localizados numa cadeia de vértices reflexos que inicia, por exemplo, em u e finaliza em v , (ver figura 2.29). Tal implica que tanto u como v estão localizados numa folha da H-partição ou da V-partição de P , tratando-se duma contradição. ■

Lema 2.13 *Se um polígono ortogonal não admitir cortes-ímpares horizontais, então existirá uma partição de P que conterà $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ polígonos L-shape.*

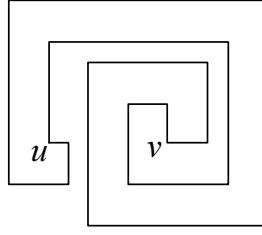


Figura 2.29: Polígono ortogonal em espiral.

Prova: Pelo Lema 2.11, o H-grafo de qualquer polígono sem cortes-ímpares horizontais, admite exactamente uma raiz e um vértice H-isolado localizado nessa raiz, (ver figura 2.30(a)). Prolongue-se a aresta horizontal incidente no vértice x H-isolado de modo a dividir o polígono em dois, (ver figura 2.30(b)). É fácil verificar que este corte divide P em dois histogramas disjuntos.

Rotule-se os vértices reflexos no sentido anti-horário e considere-se $x = r_0$.

O resultado segue-se, criando uma partição para cada um dos histogramas resultantes: fazendo-lhes um corte com uma linha vertical, através de cada vértice de índice par (por exemplo).

A prova está ilustrada na figura 2.30 ■

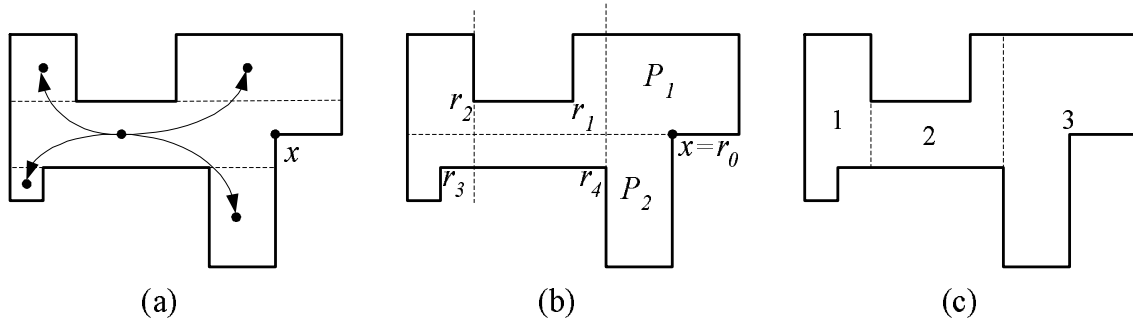


Figura 2.30: Ilustração da prova do Lema 2.13.

Agora, o objectivo é demonstrar como podemos obter uma partição de P em peças L-shaped (L-partição de P).

Para começar, assuma-se que P não admite cortes-horizontais que unem dois vértices reflexos. De seguida, suponha-se que P contém um número ímpar de vértices reflexos. O caso em que P admite um número par de vértices reflexos será tratado no fim da prova do caso ímpar. A aproximação é justificada pela seguinte observação: um corte-ímpar dum polígono com número ímpar de vértices reflexos divide-o em dois subpolígonos, cada um com um número ímpar de vértices reflexos. Observe-se ainda que se for feito um corte em P através de um corte ímpar h e, se h' é um corte-ímpar de P diferente de h , então h' é também um corte ímpar do subpolígono de P que o contém.

De seguida será apresentado um algoritmo para encontrar uma L-partição dum polígono P com número ímpar de vértices reflexos.

Algoritmo 2.1 *Encontrar uma L-partição dum polígono P com r ímpar.*

1. *Encontrar todos os cortes horizontais de P .*
2. *Encontrar todos os cortes-ímpares horizontais.*
3. *Faça-se um corte em P em todos os corte-ímpares.*
4. *Qualquer peça resultante não admite cortes-ímpares horizontais, ou seja, é um histograma.*
Construa-se uma partição cortando através duma linha vertical em todos os vértices reflexos de índice par.

Cada subpolígono P_i de P obtido no passo 3 do algoritmo não admite cortes-ímpares e, pelo Lema 2.13, existe uma partição que subdivide P_i em $\lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor + 1$ polígonos L-shaped, onde r_i é o número de vértices reflexos de P_i . Segue-se que o algoritmo realmente constrói uma partição de P como era desejada.

Considere-se agora que P tem um número par r de vértices reflexos.

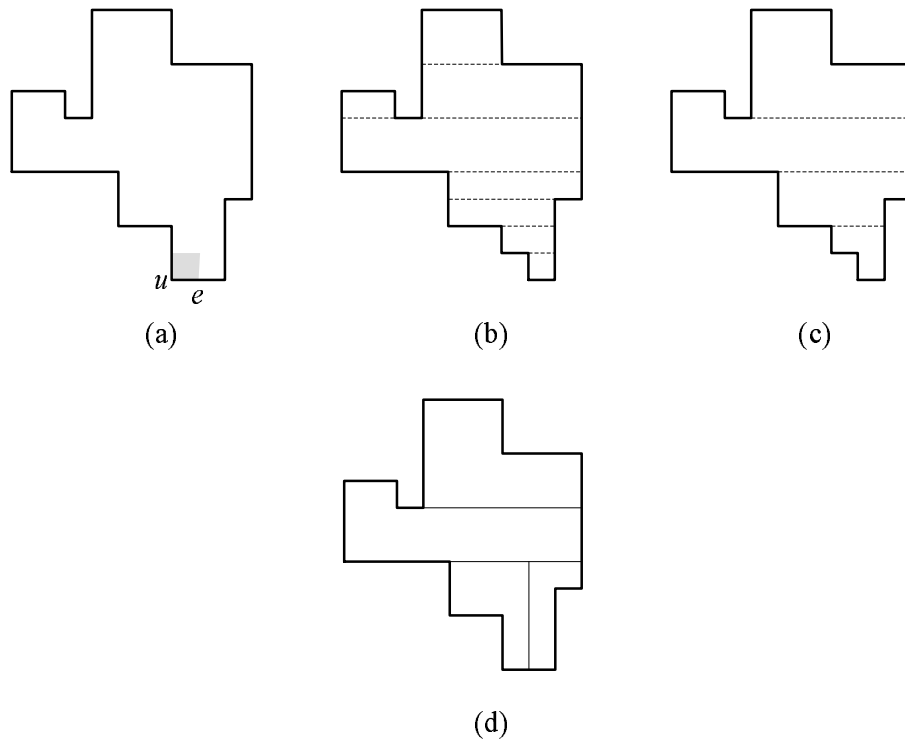


Figura 2.31: Construção duma L-partição para um Polígono com r par.

Primeiro, constrói-se um vértice reflexo extra de P do seguinte modo: seja e a aresta horizontal de menor ordenada de P e u o vértice de menor abcissa, (ver figura 2.31(a)). Assumindo que P está na posição original, então todos os seus vértices têm coordenadas diferentes. Considere-se que a distância, horizontal e vertical, entre quaisquer dois pontos de P é pelo menos ϵ . Remova-se de P um quadrado com lados paralelos aos eixos coordenados tal que o comprimento das suas arestas é ϵ e o seu vértice u é o

de menor abcissa e de menor ordenada, (ver figuras 2.31(a) e (b)). Seja P' o polígono ortogonal resultante. P' tem exactamente $r + 1$ vértices reflexos, (ver figura 2.31(c)). Pelo Lema 2.13, P' admite uma partição com $\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor + 1$ peças *L-shape*, (ver figura 2.31(d)). Como, neste caso, r é par tem-se que $\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.

Podem ser encontrados mais resultados de decomposição de polígonos em [3], [4], [7], [27], [30], [37], [54], [42] e [43].

Capítulo 3

Teorema da Galeria de Arte

Em 1975, V.Chvátal [8] provou que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são sempre suficientes para vigiar o interior dum polígono com n arestas e em alguns casos, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são necessários. Este resultado é conhecido por *Teorema da Galeria de Arte*. No seu artigo original, Chvátal, apresenta um exemplo dum polígono que requer $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas, (ver figura 3.1).

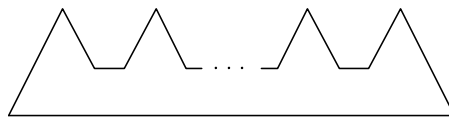


Figura 3.1: Exemplo duma família de polígonos que requer $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas

Assume que são suficientes $\frac{k}{3}$ guardas para $k < n$ vértices. Para provar que a fórmula é válida para um dado polígono, com n vértices, retira de forma adequada partes desse polígono. Deste modo reduz o número de vértices, o que permite a aplicação da hipótese de indução e, finalmente, volta a juntar as regiões removidas.

Como já foi referido na Introdução, três anos depois Fisk [16] provou de uma forma mais simples o Teorema da Galeria de Arte. Fisk recorreu à decomposição de polígonos e à coloração de grafos.

Na secção 3.2. serão apresentadas as duas demonstrações deste resultado clássico.

3.1 Visibilidade em Polígonos Simples

O objectivo deste subcapítulo é introduzir o conceito de visibilidade em polígonos e definir grafo de visibilidade.

Definição 3.1 *Dois pontos u e v de um polígono P vêem-se claramente se o segmento $[uv]$ com extremos em u e v estiver totalmente contido em P , (ver figura 3.2(a)).*

O conceito de visibilidade num polígono com buracos é idêntico ao conceito de visibilidade num polígono simples. Para isso basta considerar que o interior dos buracos pertence ao exterior do polígono, (ver figura 3.2(b)).

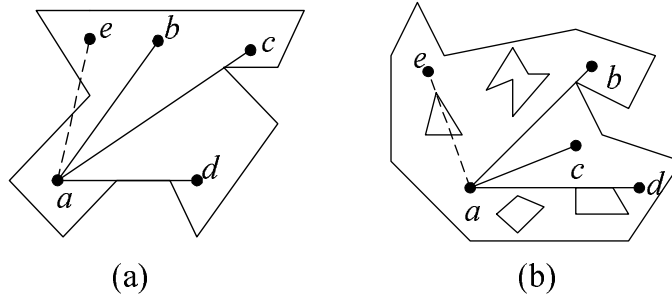


Figura 3.2: O ponto a vê b , c e d , mas não vê e .

Definição 3.2 O núcleo $K(P)$ de um polígono P é o conjunto formado pelos pontos de P que vêem todos os pontos de P , formalmente, $K(P) = \{x \in P \mid \forall y \in P, x \text{ vê } y\}$, (ver figura 3.3).

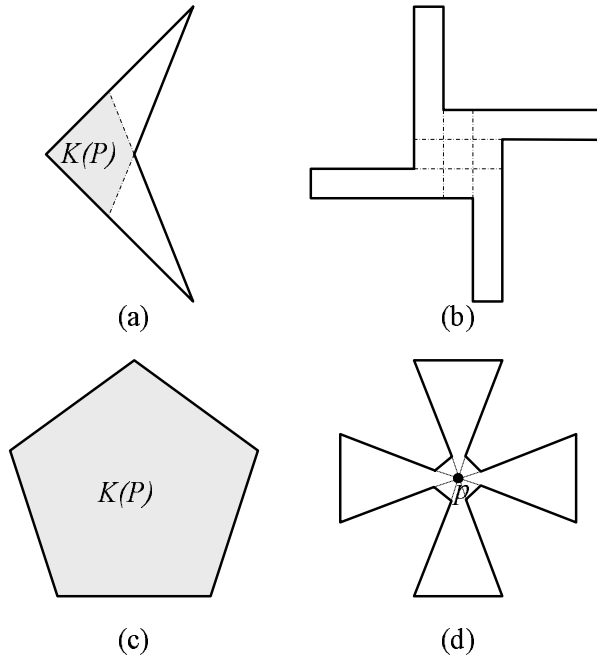


Figura 3.3: Exemplo de polígonos com: (a) $K(P) \neq \emptyset$, (b) $K(P) = \emptyset$, (c) $K(P) = P$, (d) $K(P) = p$.

Facilmente concluímos que $K(P) = P$ quando P é convexo, (ver figura 3.3(c)). Caso $K(P) \neq \emptyset$ então P é estrelado, (ver figuras 3.3(a), (c) e (d)). Recorde-se que para que P seja estrelado basta que contenha um ponto p visível por todos os outros pontos de P . O polígono ilustrado na figura 3.3(b) não é estrelado e, conseqüentemente, $K(P) = \emptyset$.

Definição 3.3 A região de visibilidade $V(p)$ de um ponto p , dum polígono P , é o conjunto de todos os pontos visíveis de p em P , formalmente, $V(p) = \{q \in P \mid p \text{ vê } q\}$, (ver figura 3.4).

A Definição 3.3 é válida para polígonos com buracos. Por definição, $V(p)$ é estrelado, pois $p \in K(V(p))$. A região de visibilidade geralmente é um polígono mas nem sempre tal acontece, (ver figura 3.5).

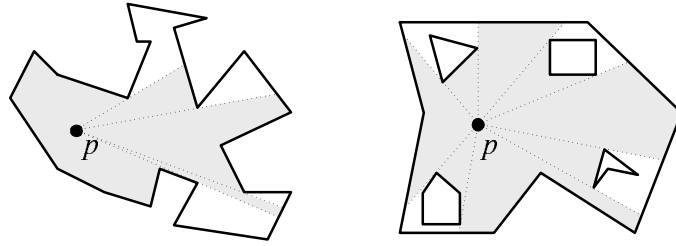


Figura 3.4: A região de visibilidade de p num polígono sem e com buracos.

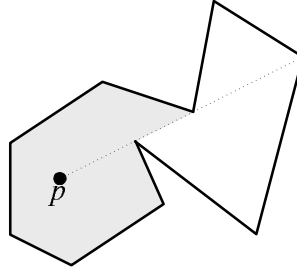


Figura 3.5: Um caso em que $V(p)$ não é um polígono.

Definição 3.4 Seja S um subconjunto de P . Um ponto p diz-se de visibilidade fraca de S se for visível por um ponto qualquer de S . O conjunto de todos os pontos de visibilidade fraca de S designa-se por polígono de visibilidade fraca de S e denota-se por $V(S)$.

Da mesma forma, define-se ponto de visibilidade forte e polígono de visibilidade forte de S .

Definição 3.5 Um ponto p diz-se de visibilidade forte de S se for visível de todos os pontos de S . O conjunto de todos os pontos com visibilidade forte para S é designado por polígono de visibilidade forte de S .

A figura 3.6, apresenta dois exemplos: um dum polígono de visibilidade fraca e outro dum polígono de visibilidade forte, de uma aresta e de P .

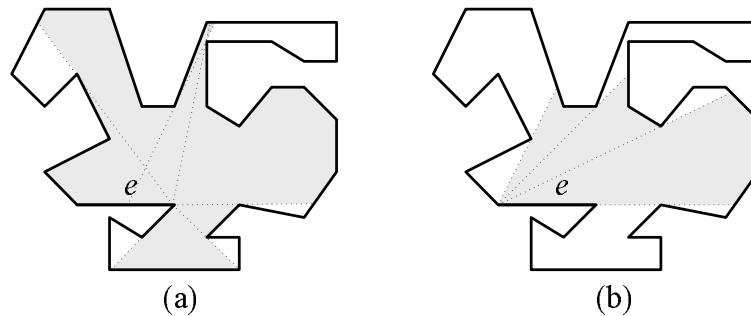


Figura 3.6: (a) Polígono de visibilidade fraca da aresta e de P ; (b) Polígono de visibilidade forte da aresta e de P .

3.1.1 Grafo de Visibilidade

Definição 3.6 Um grafo de visibilidade $VG(P)$, de um polígono P , é um grafo que relaciona a visibilidade dos vértices de P . O grafo de visibilidade, do polígono P , admite como vértices os vértices de P e como arestas as linhas que unem dois vértices que se vêem claramente em P , (ver figuras 3.7 (a) e (b)).

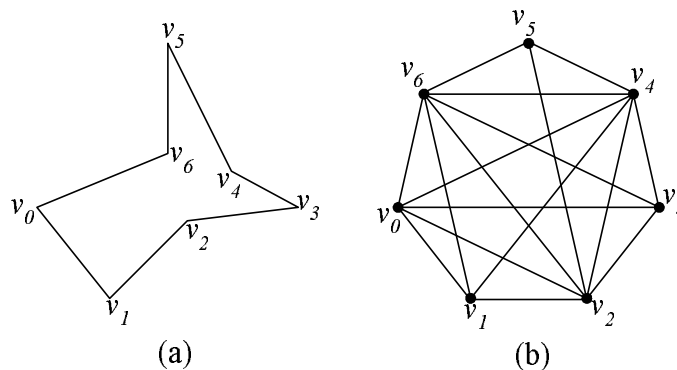


Figura 3.7: (a) Um polígono; (b) O grafo de visibilidade do polígono.

Na maioria das vezes o grafo de visibilidade é desenhado directamente no polígono. Considera-se que um grafo de visibilidade é a colecção de todas as arestas e diagonais de um polígono. Segundo este ponto de vista, uma triangulação pode ser considerada como sendo um subgrafo do grafo de visibilidade. De facto, qualquer subgrafo maximal do grafo de visibilidade, em que as arestas não se auto-intersectam, é uma triangulação.

Nota: A Definição 3.6 também é válida para polígonos com buracos.

Podem ser encontrados mais resultados sobre visibilidade em polígonos em [27] e em [6].

3.2 Formalização do Problema da Galeria de Arte

A planta de uma sala com n paredes, duma galeria de arte, é vista como um polígono com n vértices. Considere-se o problema de determinar o menor número de guardas estacionários que são necessários, para que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um guarda. Assuma-se que cada guarda é estacionário, i.e, ocupa uma posição fixa, mas pode ver em todas as direcções. Deste modo, cada guarda é representado por um ponto fixo com visibilidade 2π radianos. Um conjunto de guardas *guardam*, *cobrem*, *vigiam* ou *iluminam* um polígono, se cada ponto do polígono puder ser visto por pelo menos um guarda. No próximo capítulo serão abordados outros tipos de guardas que originaram variantes do Problema da Galeria de Arte.

Em 1973, V. Klee propôs o seguinte Problema:

Problema 3.1 Seja P um polígono com n vértices. Determinar o número mínimo de guardas estacionários, em função de n , que são suficientes para se vigiar P .

Repare-se que não é dada uma única informação sobre a estrutura do polígono, sabemos apenas que tem n vértices. A figura 3.8 mostra dois polígonos, um em que 3 guardas são suficientes e o outro em que 4 são suficientes, para que fiquem vigiados.

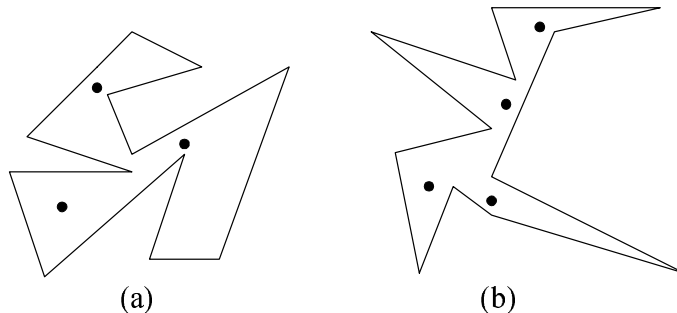


Figura 3.8: (a) Polígono vigiado por três guardas, (b) Polígono vigiado por quatro guardas.

Agora, seguindo a mesma ideia que O'Rourke [37], formaliza-se o problema proposto por Klee.

Para qualquer polígono P , defina-se $G(P)$ como sendo o menor número de guardas (pontos de P) necessários para se vigiar um polígono P : o mínimo k de modo a existir um conjunto de pontos x_1, \dots, x_k de P , tal que para qualquer $y \in P$, algum x_i , $1 \leq i \leq k$, vê y . Seja $g(n)$ o máximo valor de $G(P)$ sobre todos os polígonos de n vértices,

$$g(n) = \max\{G(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices} \}$$

É trivial que $G(P) < n$ e, conseqüentemente, basta colocar um guarda em cada vértice de P para que este fique totalmente vigiado.

O objectivo do Problema original, proposto por Klee, é determinar $g(n)$. A função $g(n)$ representa o número máximo de guardas que são sempre necessários para vigiar um polígono com n vértices: para qualquer polígono com n vértices são sempre suficientes $g(n)$ guardas e, para pelo menos um polígono com n vértices, são necessários $g(n)$ guardas.

Em substituição dir-se-á que: $g(n)$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes, ou apenas, necessários e suficientes.

As salas duma galeria que têm o formato dum polígono convexo, independentemente do número de vértices, podem ser vigiadas por apenas um guarda colocado em qualquer ponto da sala. Todo o polígono com três vértices é convexo, logo $g(3) = 1$. Um polígono com quatro vértices tem no máximo 1 ângulo reflexo mas, mesmo assim, é possível vigiá-lo com apenas um guarda, logo $g(4) = 1$. Um polígono com cinco vértices pode ter 0, 1 ou 2 vértices reflexos. Com algumas experiências deduz-se que estes podem ser vigiados utilizando unicamente um guarda e, conseqüentemente, $g(5) = 1$. Existem polígonos com seis vértices que necessitam 2 guardas para que fiquem totalmente vigiados. A situação está ilustrada na figura 3.9.

Seria interessante saber como varia o número de guardas necessários para vigiar um polígono, em função de n . O polígono “pente” da figura 3.10 mostra que $g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

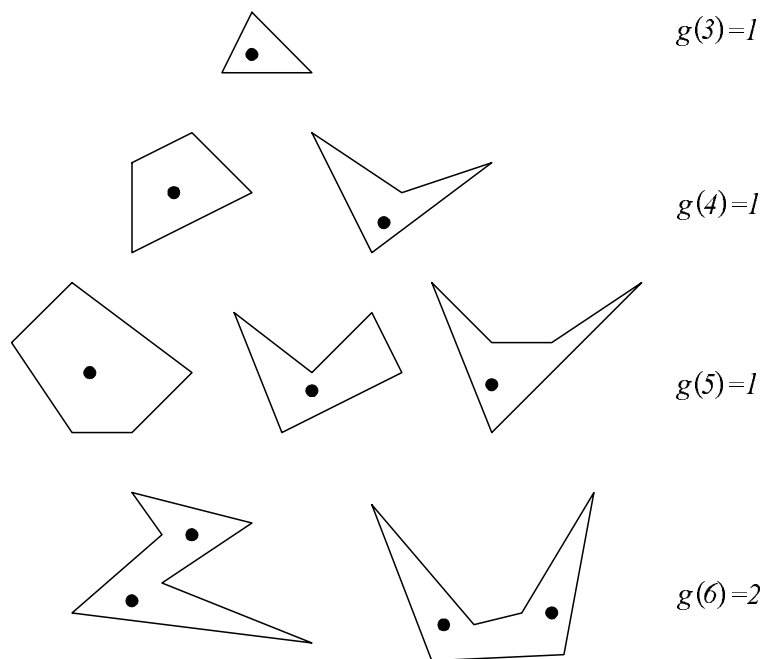


Figura 3.9: Polígonos com no máximo 5 vértices podem ser vigiados utilizando apenas 1 guarda, mas alguns polígonos com 6 vértices necessitam de 2 guardas.

De seguida e de duas formas distintas, demonstra-se que este número é sempre suficiente, ou seja, que qualquer polígono com n vértices pode ser sempre vigiado utilizando no máximo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas.

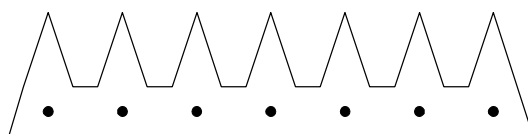


Figura 3.10: Exemplo de um polígono onde $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são necessários.

Teorema 3.1 (Teorema da Galeria de Arte) *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas para se vigiar um polígono com n vértices.*

Primeiro apresenta-se a prova dada por Chvátal e de seguida a dada por Fisk. O lema que se segue é fundamental para a prova de Chvátal:

Lema 3.1 *Para qualquer triangulação de um polígono com n vértices, $n \geq 6$, existe sempre uma diagonal d que corta fora exactamente 4, 5 ou 6 arestas.*

Prova: Escolha-se d para ser a diagonal que separa fora um número mínimo de arestas do polígono, i.e, pelo menos 4. Seja $k \geq 4$ o número mínimo e rotule-se os vértices do polígono por v_0, v_1, \dots, v_{n-1} tal que d é $[v_0 v_k]$, (ver figura 3.11). A diagonal d é a base do triângulo cujo terceiro vértice está em v_t , com $0 \leq t \leq k$. Já que $[v_0 v_t]$ e $[v_k v_t]$ cortam fora menos que k arestas, pela minimalidade de k tem-se que $t \leq 3$ e $k - t \leq 3$. Consequentemente, $k \leq 6$. ■

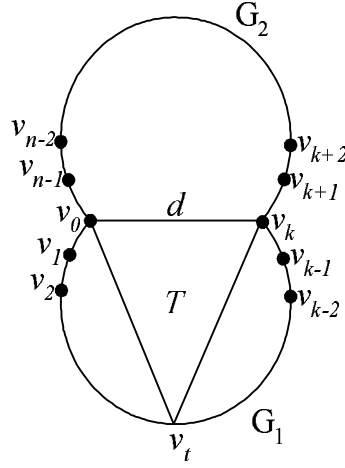


Figura 3.11: A diagonal d corta fora k vértices de G_1 .

Definição 3.7 *Defina-se por leque, uma triangulação com um vértice (o centro do leque) que é partilhado por todos os triângulos, (ver figura 3.12).*

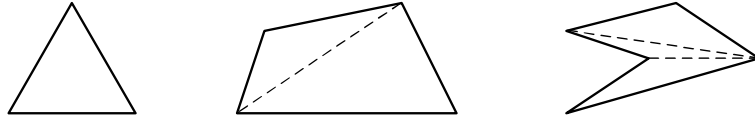


Figura 3.12: Triangulações com menos de cinco vértices são necessariamente leques.

Prova de Chvátal: Chvátal considerou a seguinte hipótese de indução:

Hipótese de Indução: Seja P um polígono com n lados, qualquer triângulo de P pode ser particionado em $g \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques.

Visto tratar-se dum polígono então $n \geq 3$ e se, particularmente, $n = 3, 4$ ou 5 , existirá apenas uma triangulação possível, cada uma das quais é um leque, (ver figura 3.12). Assim, a hipótese de indução é válida para $n < 6$. Dada uma triangulação com $n \geq 6$, o que se pretende é remover parte da triangulação, aplicar a hipótese de indução e depois recolocar a peça removida. Sabe-se que existe sempre uma diagonal (de facto, existem sempre pelo menos duas) que corta fora um triângulo. Mas repare-se que tal apenas reduz n por 1 e se, por acaso, se iniciar com $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$, então a hipótese de indução particionará P em $g = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques e, geralmente, finalizar-se-á com $g + 1$ leques ao recolocarmos o triângulo. De forma a que a indução funcione com a fórmula $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, o objectivo é reduzir n por pelo menos 3 e, deste modo, a hipótese de indução será válida a menos de g leques, permitindo que o grupo de triângulos removidos se transforme num leque.

Deste modo, questiona-se: *Será que existe sempre uma diagonal que, ao particionar o polígono, lhe remova 4 arestas e assim reduza n por 3?*

A resposta é não, como mostra a figura 3.13.

A ideia de Chvátal é a de existir sempre uma diagonal que corta fora 4, 5 ou 6 arestas, (ver Lema 3.1). Designe-se por d esta diagonal especial. Aplique-se a hipótese de

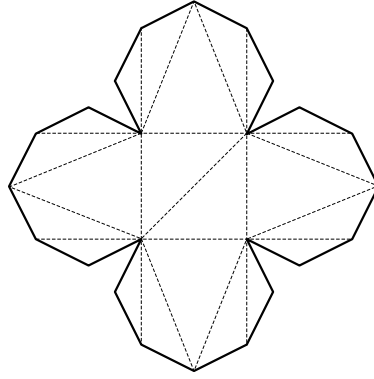


Figura 3.13: Nenhuma diagonal desta triangulação corta fora exactamente três vértices.

indução à porção do outro lado da diagonal especial d . Seja G_1 a triangulação em que d é diagonal de corte, G_1 admite $k + 1$ arestas fronteiriças, ou seja, é um polígono de $k + 1$ vértices, (ver fig 3.11). Seja G_2 o resto da triangulação original, que partilha d , então G_2 admite $n - k + 1$ vértices. A hipótese de indução afirma que G_2 pode ser particionada em $g' = \lfloor \frac{n-k+1}{3} \rfloor$ leques. Pelo Lema 3.1, $k \geq 4$ e, consequentemente, $g' \leq \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$. Assim, de forma a assegurar a validade do Teorema, basta mostrar que G_1 apenas adiciona mais um leque à partição. Considere-se cada um dos valores possíveis para k .

caso 1 ($k=4$) G_1 é um pentágono. Já foi referido que cada pentágono é um leque, (ver fig 3.12). Assim, G foi particionado em $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques.

caso 2 ($k=5$) G_1 é um hexágono. Considere-se o triângulo T de base d e com o terceiro vértice em v_t . Se $t = 1$ ou $t = 4$, as diagonais $[v_0v_t]$ ou $[v_5v_t]$ cortarão fora 4 arestas, contrariando a minimalidade de $k = 5$. Restam os casos em que $t = 2$ e $t = 3$, este que são claramente simétricos. Sem perda de generalidade, assumamos que $t = 2$, (ver fig 3.14).

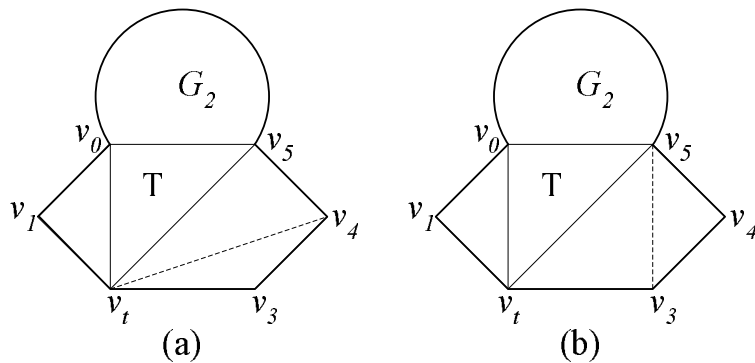


Figura 3.14: G_1 é um hexágono

O quadrilátero $[v_2v_3v_4v_5]$ admite uma triangulação de duas formas distintas:

caso 2a A diagonal $[v_2v_4]$ pertence à triangulação, (ver fig 3.14(a)). Então G_1 é um leque, tal como se pretende.

caso 2b A diagonal $[v_3v_5]$ pertence à triangulação, (ver fig 3.14(b)). Construa-se o grafo G_0 como sendo a reunião de G_2 e T . Assim, G_0 admite $n - 5 + 1 + 1 = n - 3$ arestas. Aplique-se a hipótese de indução a G_0 , particionando-o em $g' = \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ leques. Como T está contido em G_0 , então T deve ser parte de um leque F cujo centro deve estar num dos vértices de T (caso contrário não seria um leque, o vértice v_2 apenas está ligado a v_0 e a v_5):

caso 2b.1 F admite como centro v_0 ou v_2 . Una-se $[v_0v_1v_2]$ a F , este continua a ser um leque de G_0 . Considere-se o quadrilátero $[v_2v_3v_4v_5]$, a triangulação obtida à custa da diagonal $[v_3v_5]$ é um leque. Assim, G é coberto com $g' + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques.

caso 2b.2 F admite como centro v_5 . Com um raciocínio idêntico, una-se $[v_2v_3v_5]$ e $[v_3v_4v_5]$ a F , este que continua a ser um leque de G_0 . Claramente que $[v_0v_1v_2]$ é um outro leque. Assim, obtém-se $g' + 1$ leques

caso 3 ($k=6$) G_1 é um heptágono. O terceiro vértice do triângulo T de base d não pode estar em v_1, v_2, v_4 , ou v_5 . Caso contrário, existirá uma diagonal que corta fora $4 \leq k < 6$ arestas, contrariando a minimalidade de k . Deste modo, $t = 3$. Cada um dos dois quadriláteros, $[v_0v_1v_2v_3]$ e $[v_3v_4v_5v_6]$, admitem duas possíveis triangulações:

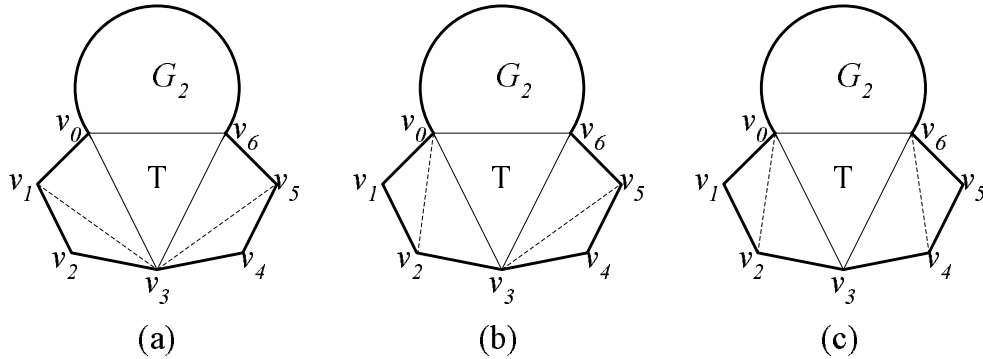


Figura 3.15: G_1 é um heptágono

caso 3a As diagonais $[v_3v_1]$ e $[v_3v_5]$ pertencem à triangulação, (ver fig 3.15(a)). Então G_1 é um leque de centro v_3 .

caso 3b As diagonais $[v_0v_2]$ e $[v_3v_5]$ pertencem à triangulação, (ver fig 3.15(b)). O procedimento aplicado neste caso é idêntico ao do caso 2b. Una-se o quadrilátero $[v_0v_2v_3v_6]$ a G_2 para se obter um polígono G_0 com $n - 6 + 1 + 2 = n - 3$ vértices, pela hipótese de indução, pode ser particionado em $g' = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ leques. Seja F um leque, desta partição, cujo triângulo $[v_0v_2v_3]$ lhe pertence. O centro de F deve estar num dos vértices do triângulo referido:

caso 3b.1 F tem centro em v_0 ou v_2 . Una-se $[v_0v_1v_2]$ a F , este que continua a ser um leque. Claramente que $[v_3v_4v_5v_6]$ é um leque.

caso 3b.2 F tem centro em v_3 . Una-se $[v_3v_4v_5v_6]$ a F e considere-se o leque $[v_0v_1v_2]$.

Em ambos os casos G é particionado em $g' + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques.

caso 3c As diagonais $[v_1v_3]$ e $[v_4v_6]$ pertencem à triangulação. Este caso é simétrico ao caso 3b.

caso 3d As diagonais $[v_0v_2]$ e $[v_4v_6]$ pertencem à triangulação, (ver fig 3.15(c)). Una-se T com G_2 para se obter um polígono G_0 com $n - 6 + 1 + 1 = n - 4$ vértices. Aplique-se a hipótese de indução de modo a construir uma partição de G_0 em $g' = \lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ leques. Seja F um leque da partição que contém T , então o centro de F é um dos vértices de T :

caso 3d.1 F tem centro em v_0 . Una-se o quadrilátero $[v_0v_1v_2v_3]$ a F e um outro leque é $[v_3v_4v_5v_6]$.

caso 3d.2 F tem centro em v_3 . Como G_2 está acima da diagonal definida por $d = [v_0v_6]$ então F não é mais do que T e, consequentemente, também admite centro em v_0 , caindo no caso 3d.1.

caso 3d.3 F tem centro em v_6 . Este caso é simétrico ao caso 3d.1.

Em todos os casos, G é particionado em $g' + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ leques. Basta um guarda para vigiar um leque.

A prova fica concluída ao colocarmos um guarda no centro de cada leque. ■

Prova de Fisk: Seja P um polígono arbitrário com n vértices. Pelo Teorema 2.1, sabe-se que todo o polígono P tem pelo menos uma triangulação, em particular seja T uma triangulação de P . Seja G_T uma grafo associado a T , aplicando o Teorema 2.4, conclui-se que G_T é 3-colorível. Considere-se que as cores utilizadas são azul, verde e amarelo. É fácil concluir que cada triângulo de T tem um vértice de cada uma dessas cores. Como os triângulos de T cobrem P e, cada triângulo tem um vértice de cor amarela (ou uma das outras duas cores), então basta colocar um guarda em qualquer vértice amarelo para que P fique vigiado, (ver figura 3.16). Analogamente, guardas colocados nos vértices de cor azul vigiam P e o mesmo sucede com os vértices de cor verde. Pelo menos uma dessas 3 cores é utilizada no máximo em $\frac{n}{3}$ vértices. Como o número de vértices com uma determinada cor é um número inteiro substitui-se $\frac{n}{3}$ por $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, ou seja, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são suficientes para vigiar um polígono P com n vértices. Para se comprovar que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários basta observar o polígono “pente” com $n = 3m$ vértices, (ver fig. 3.10). ■

A prova de Fisk é bastante mais simples que a prova de Chvátal. Apesar de ambas iniciarem com a triangulação de polígonos, Chvátal não recorre à coloração de grafos, opta antes por provar por indução. É importante referir que a prova de Chvátal revela aspectos do problema que pelo argumento da coloração não são evidenciados. No Capítulo 4, poder-se-á observar que o argumento de Chvátal generaliza em alguns casos enquanto que o argumento de Fisk não.

No teorema clássico, uma galeria de arte é vista como um simples polígono. Na realidade, tradicionalmente uma galeria de arte apresenta uma construção rectangular

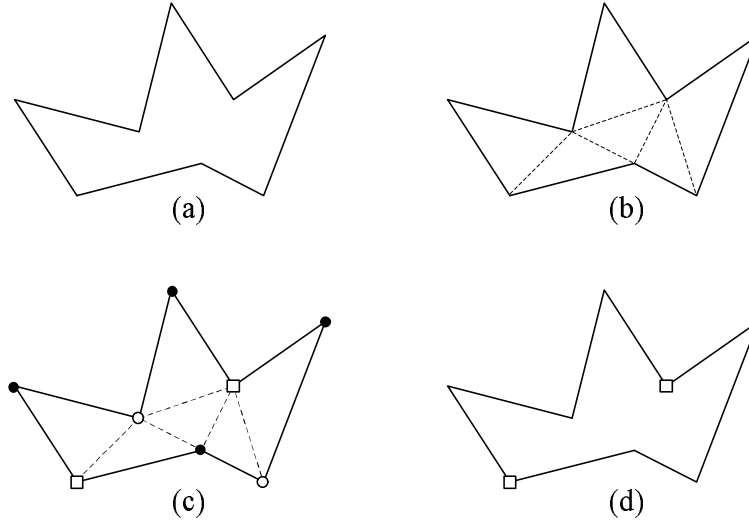


Figura 3.16: Ilustração da prova dada por Fisk: (a) exemplo dum polígono P com 8 vértices, (b) exemplo duma triangulação de P , (c) possível 3-coloração de G_T , (d) possível escolha para a colocação dos dois guardas.

subdividida em salas rectangulares. Assuma-se que qualquer duas salas adjacentes têm uma porta em comum, (ver figura 3.17).

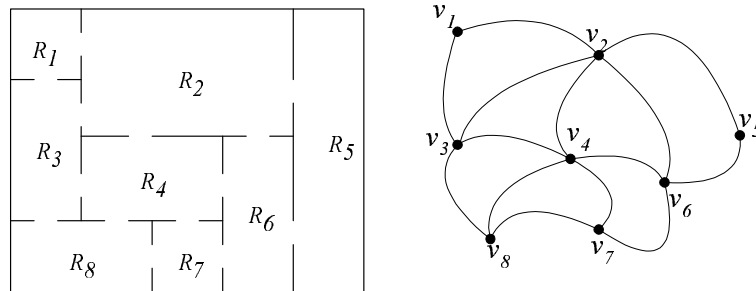


Figura 3.17: Tradicional Galeria de arte e o respectivo grafo dual.

Quantos guardas estacionários são necessários para vigiar todas as salas da Galeria?

Considera-se que se um guarda for colocado numa porta este poderá vigiar em simultâneo duas salas. Em 1994, J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia e J. Zaks [10], provaram que são pelo menos necessários $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardas para que uma galeria de arte tradicional com n salas fique totalmente vigiada.

Teorema 3.2 *Qualquer galeria de arte rectangular com n salas pode ser vigiada com exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardas estacionários.*

Prova: Seja T uma galeria de arte rectangular com n salas R_1, \dots, R_n . Associa-se a T um grafo dual $G(T)$ do seguinte modo: representa-se cada sala R_i de T por um vértice v_i em $G(T)$ e considera-se que dois vértices são adjacentes se as salas correspondentes

forem adjacentes, (ver figura 3.17).

Note-se que a fronteira, resultante da união dos rectângulos correspondentes aos vértices de qualquer subgrafo conexo de $G(T)$, forma um polígono ortogonal, possivelmente com alguns buracos ortogonais.

Agora, o objectivo é provar que se $G(T)$ tiver um número par de vértices, admitirá um emparelhamento perfeito M . Para tal, basta mostrar que $G(T)$ satisfaz o Teorema de Tutte.

Seja S um subconjunto qualquer de vértices de $G(T)$ e k o número de componentes conexas de $G(T) \setminus S$. Cada componente C_i de $G(T) \setminus S$ é representada por um subpolígono ortogonal P_i de T . Sabendo que cada um destes subpolígonos tem pelo menos quatro cantos e que o número total de cantos provem de k componentes, então existem pelo menos $4k$ cantos, (ver figura 3.18).

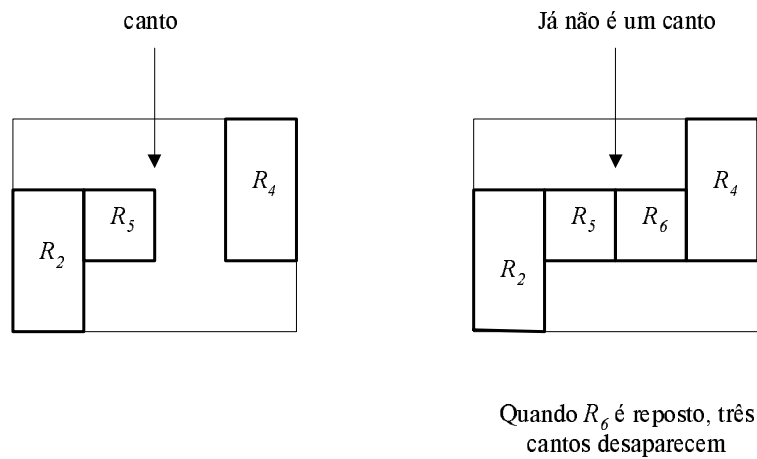


Figura 3.18: As componentes de $G(T) \setminus S$ são polígonos ortogonais.

A seguinte observação é essencial para a prova: quando um rectângulo representado por um ponto em S é reposto, no máximo quatro cantos desaparecem.

Quando todos os rectângulos de S forem repostos, os cantos provenientes das componentes de $G(T) \setminus S$ desaparecerão excepto os quatro cantos de T .

Segue-se que $k \leq |S| + 1$.

Para provar que $G(T)$ verifica o Teorema de Tutte consideram-se dois casos:

caso 1 $k < |S| + 1$.

Como k e $|S|$ são números inteiros então $k \leq |S|$, mas $Odd(G(T) \setminus S) \leq k$ e, consequentemente, $Odd(G(T) \setminus S) \leq |S|$.

caso 2 $k = |S| + 1$.

Para este caso basta mostrar que $G(T) \setminus S$ tem pelo menos uma componente com um número par de vértices:

$$Odd(G(T) \setminus S) \leq k - 1 = |S|$$

Estuda-se separadamente os casos em que $|S|$ é par ou ímpar:

caso 2.a) $|S|$ é ímpar.

Então k é par. Por sua vez, como o número de vértices de $G(T)$ é par, a soma do número de vértices de todas as componentes de $G(T) \setminus S$ é ímpar. Assim, pelo menos uma componente de $G(T) \setminus S$ tem um número par de vértices.

caso 2.b) $|S|$ é par.

Então k é ímpar. Por sua vez, como o número de vértices de $G(T)$ é par, a soma do número de vértices de todas as componentes de $G(T) \setminus S$ é par. Assim, pelo menos uma componente de $G(T) \setminus S$ tem um número par de vértices.

Deste modo, fica provado que $G(T)$ admite um emparelhamento perfeito.

Escolha-se, usando M , $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pontos da seguinte forma: para cada aresta $[v_i v_j]$ de $G(T)$ em M , fixe-se um guarda na porta partilhada por R_i e R_j . Claramente, que estes guardas vigiam todos os subrectângulos de T . O caso em que $G(T)$ tem um número ímpar de vértices, o resultado segue-se subdividindo uma das sala de T em duas. ■

A arquitectura mais moderna promove a imaginação e, conseqüentemente, as mais recentes e futuras Galerias de Arte, provavelmente, não são nem serão rectangulares! Assim sendo, também é interessante fazer o estudo de Galerias de Arte não rectangulares.

Deste modo, pretende-se fazer o estudo de problemas que envolvam Galerias de Arte em edifícios convexos, estes que são subdivididos em salas convexas. Parta-se do princípio que se duas salas partilham duma mesma parede, então existe uma porta que as liga, (ver figura 3.19).

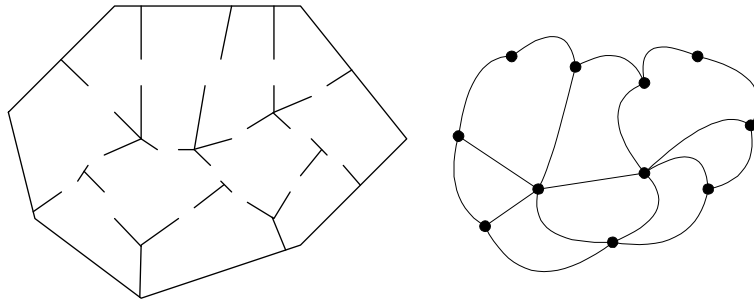


Figura 3.19: Uma Galeria de Arte convexa subdividida em salas convexas.

Urrutia [54], provou que estas Galerias podem ser vigiadas no máximo por $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardas estacionários.

Com este propósito utiliza-se o seguinte resultado, que se deve a Nishizeki [32] (este teorema não vai ser demonstrado visto apenas ser utilizado para provar o Teorema 3.4. A prova pode ser encontrada em [33]):

Teorema 3.3 *Seja G um grafo planar 2-conexo, tal que o grau de cada vértice de G é pelo menos 3. Então para todo $n \geq 14$, G tem um emparelhamento com tamanho mínimo de $\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$. Para $n < 14$, G tem um emparelhamento de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Teorema 3.4 *Qualquer galeria de arte convexa T com n salas convexas, pode ser vigiada com pelo menos $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardas estacionários.*

Prova: Seja $G(T)$ o grafo dual de T construído de forma similar ao do Teorema 3.2. Suponha-se que $G(T)$ não contém vértices de corte com grau 2. Este caso pode ser resolvido facilmente utilizando um argumento indutivo. Considere-se o caso em que $G(T)$ tem vértices de grau 2. Como as salas da galeria são convexas, qualquer sala interna, i.e, uma sala contida no interior de T , tem grau maior ou igual a 3. Os vértices de grau dois de $G(T)$ correspondem às salas *expostas* de T , i.e., salas que partilham paredes com a fronteira de T . Então ao adicionar-se um vértice artificial a $G(T)$, adjacente a todas as salas *exposta* de T , obtém-se um grafo 2-conexo tal que todos os seus vértices têm pelo menos grau 3.

Pode-se aplicar o Teorema 3.3 ao grafo obtido pela adição da aresta extra. Tal produz um emparelhamento M de tamanho mínimo $\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor$ se $n \geq 14$ e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ se $n < 14$. Cada aresta de M corresponde a duas salas adjacentes que podem ser vigiadas por um único guarda. Tal acontece para $2\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor$ salas de T se $n \geq 14$ e $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ salas de T se $n < 14$. Coloca-se um guarda em cada uma das salas referidas. Assim, se $n \geq 14$, pode-se vigiar T no máximo com: $\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor + ((n+1) - 2\lfloor \frac{n+5}{3} \rfloor) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardas estacionários. Prove-se o teorema para $n < 14$, como se trata de uma galeria de arte $n \geq 2$. Se a galeria de arte for constituída apenas por duas salas um guarda é suficiente para a vigiar, se tiver três ou quatro salas bastam 2 guardas, se tiver cinco ou seis salas bastam 3 guardas e se tiver sete salas bastam 4 guardas; cada um destes valores é menor ou igual a $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Se $7 < n < 14$, vigia-se T com pelo menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + ((n+1) - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) < \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardas estacionários:

- se que n é par, então existe um $k = 4, 5, 6$ tal que $n = 2k$

$$2k + 1 - \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor = k + 1 \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$$

- se que n é ímpar, então existe um $k = 5, 6, 7$ tal que $n = 2k - 1$

$$(2k - 1) + 1 - \lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = k + 1 = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$$

Um exemplo em que são necessários $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ guardas está representada na figura 3.20. ■

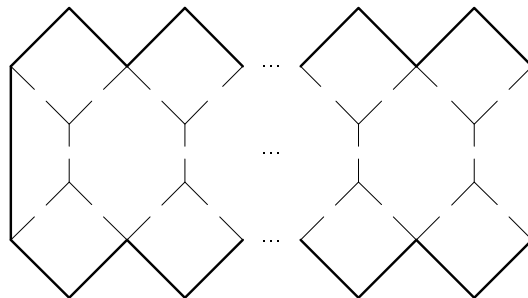


Figura 3.20: Exemplo de uma Galeria de Arte convexa com $3m+1$ salas e que necessita de $2m$ guardas.

3.3 Complexidade do Problema da Galeria de Arte

Na secção anterior, provou-se que para vigiar um polígono com n vértices são suficientes e por vezes necessários $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas. Também se concluiu que para vigiar totalmente um polígono convexo é necessário apenas um guarda. A prova dada por Fisk do Teorema da Galeria de Arte, conduz a um algoritmo eficiente este que utiliza $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas para cobrir um polígono com n vértices. Primeiro construa-se uma triangulação do polígono P a vigiar, depois faça-se um 3-coloração do grafo resultante e coloque-se um guarda estacionário em todos os vértices da classe cromática menor. Este algoritmo foi dado, em 1981, por Avis e Toussaint [4]. Obtiveram um algoritmo de tempo $O(n \ln n)$ para resolver o Teorema da Galeria de Arte. Mais tarde, em 1988, Tarjan e van Wyk [51] obtiveram um algoritmo de tempo $O(n \ln \ln n)$ para triangular polígonos. A complexidade do Teorema da Galeria de Arte foi finalmente estabelecida quando Chazelle [7], em 1991, obteve um algoritmo de tempo linear para triangular polígonos. Por outro lado, o problema de encontrar o número mínimo de guardas necessários para vigiar um polígono é mais complicado, de facto é intratável: NP-difícil.

Procurar o número mínimo de guardas que vigiam um polígono dado, resume-se a um problema de cobertura do polígono. É fácil observar que a região de visibilidade dum guarda num polígono P , não é mais do que um polígono estrelado, (ver figura 3.4). Consequentemente, procurar uma cobertura dum polígono P com um número mínimo de guardas, corresponde a encontrar uma cobertura de P com um número mínimo de polígonos estrelados.

Em 1986 Lee e Lin [29] descobriram uma redução do problema 3SAT (3-satisfazível, ver [17, 20, 47]) a um polígono, provando que o problema de encontrar uma cobertura com um número mínimo de guardas, à custa de polígonos estrelados (problema StarC), é NP-difícil.

Capítulo 4

Variantes do Teorema da Galeria da Arte

Existem vários tipos de restrições que podem ser impostas aos guardas utilizados para vigiar um polígono. Estas restrições podem ser feitas tendo em conta a localização, mobilidade, visibilidade, entre outras, dos guardas. Por exemplo, pode-se impor que o guarda apenas se localize em vértices, que se mova dentro do polígono ou mesmo que a sua visibilidade seja inferior a 2π . Foram estas restrições que conduziram a algumas Variantes do Teorema da Galeria de Arte.

4.1 Definições

Nesta secção pretende-se classificar guardas. Para além das características já referidas, localização, mobilidade e visibilidade dos guardas, esta classificação também vai diferir se o pretendido for vigiar um polígono ou vigiar um grafo.

Definição 4.1 *Guardas em pontos:* O guarda pode estar localizado em qualquer ponto fixo do polígono.

Definição 4.2 *Guardas em vértices:* O guarda apenas pode estar localizado num dos vértices do polígono.

Definição 4.3 *Guardas em arestas:* O Guarda pode mover-se na aresta que lhe for destinada no polígono P . Alternativamente, considera-se uma lâmpada fluorescente do tamanho da aresta de P .

Definição 4.4 *Guardas móvel:* O Guarda pode mover-se num circuito fechado totalmente contido no polígono.

Definição 4.5 *Reflectores em pontos ou vértices:* Lâmpada com um determinado ângulo de luminosidade. Alternativamente, guarda com um determinado ângulo de visibilidade.

Para demonstrar alguns resultados será útil recorrer a um grafo. Deste modo, é importante definir a posição e o tipo de guardas que podem existir num grafo.

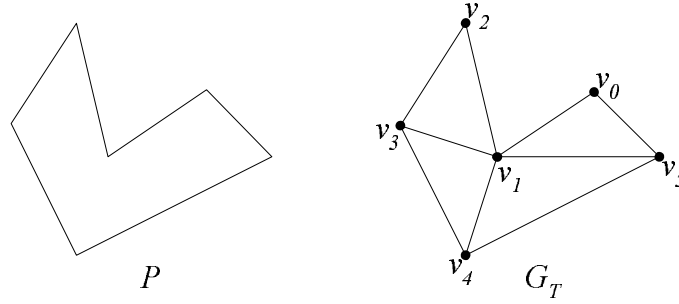


Figura 4.1: Exemplo de um polígono P e de um dos seus grafos triangular G .

Daqui em diante, um grafo G_T associado a uma triangulação T dum polígono P designar-se-á por grafo triangular, (ver figura 4.1).

Repare-se que um polígono P por vezes admite mais do que uma triangulação e, consequentemente, podem existir muitas representações de grafos triangulares. Os tipos de guardas existentes num grafo não difere em muito dos tipos de guardas em polígonos, estando mesmo relacionados uns com os outros.

Definição 4.6 *Um guarda em vértice de G é um nó de G , (por exemplo, vértice v_3 da figura 4.1).*

Definição 4.7 *Um guarda em aresta de G é um par de nós adjacentes por um arco correspondente a uma aresta de P , (por exemplo, vértices v_4 e v_5 da figura 4.1).*

Definição 4.8 *Um guarda em diagonal de G é um par de nós adjacentes por qualquer arco, (por exemplo, vértices v_4 e v_1 da figura 4.1).*

Com o propósito de distinguir os guardas de grafos dos guardas de polígonos, os guardas de grafos vão ser designados por *guardas combinatoriais* e os guardas de polígonos por *guardas geométricos*.

Definição 4.9 *Diz-se que uma colecção de guardas $C = \{g_1, \dots, g_2\}$ domina G se qualquer face triangular de G tiver pelo menos algum $g_i \in C$ num dos seus três nós.*

A Definição 4.9, permite-nos concluir que *dominar* é o mesmo que *vigiar*. Deste modo, se um grafo G for dominado então o polígono correspondente fica vigiado.

Lema 4.1 *Seja P um polígono simples e G um dos seus grafos triangulares. Se G puder ser dominado por k guardas combinatoriais em vértices, então P poderá ser vigiado por k guardas geométricos em vértices.*

Prova: Como G é dominado, cada triângulo tem pelo menos um guarda combinatorial num dos seus nós. Coloque-se guardas geométricos nos vértices de P , que correspondem aos nós de G onde estão colocados guardas combinatoriais. Fica assegurado que cada região triangular de P é vigiada. Consequentemente, P é vigiado. ■

O Lema 4.1 é de grande importância, porque estabelece uma relação entre o número de guardas combinatoriais, suficientes para dominar um grafo triangular G , e o número de guardas geométricos, suficientes para vigiar o respectivo polígono de G .

Como já foi referido no capítulo anterior, o algoritmo que permite calcular o número mínimo de guardas que vigiam um polígono P arbitrário, é NP-difícil. Deste modo, surge naturalmente a necessidade de estabelecer uma relação entre a estrutura de um polígono e a obtenção do número mínimo de guardas que vigiam esse polígono. Esta relação depende não só da estrutura do polígono a iluminar, mas também do tipo de guardas utilizados para o efeito.

Nas secções que se seguem pretende-se estabelecer essa relação: a partir de um polígono P dado encontrar um número mínimo de guardas, de uma determinada natureza, suficientes e por vezes necessários para vigiar P .

4.2 Guardas em Polígonos com Ângulos Reflexos

Nesta secção, pretende-se apenas relacionar o número de ângulos reflexos que um polígono P admite e o número de guardas que são sempre suficientes para vigiar P . Urrutia [54] provou que qualquer polígono P , com r vértices reflexos ($r \neq 0$), pode ser vigiado por r guardas. Para tal, Urrutia recorreu a uma partição de P em $r + 1$ polígonos convexos. O lema que se segue prova a existência dessa partição.

Lema 4.2 *Qualquer polígono P com r vértices reflexos, pode ser dividido em pelo menos $(r + 1)$ polígonos convexos com interiores disjuntos dois a dois.*

Prova: Seja $\{r_1, r_2, \dots, r_r\}$ o conjunto de ângulos reflexos de P . Para $i = 1, \dots, r$ tracemos um segmento de recta com origem no vértice r_i , de forma a bissectar o ângulo interno que lhe corresponde em P , e extremo num ponto da fronteira de P ou noutro segmento já traçado, (ver figura 4.2).

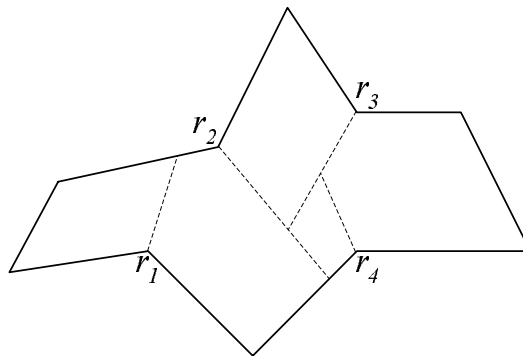


Figura 4.2: Dividir um polígono em $r + 1$ polígonos convexos.

Por indução é óbvio que estes segmentos de recta dividem P em $r+1$ polígonos convexos, tal como era pretendido. ■

Teorema 4.1 *Seja P um polígono com r vértices reflexos, $r \geq 1$. Então r guardas são sempre suficientes e ocasionalmente necessários para vigiar P .*

Prova: Prove-se primeiro que r guardas são suficientes. Particione-se P utilizando o Lema 4.2. Repare-se que cada um dos polígonos convexos obtidos pela partição,

contêm pelo menos um vértice reflexo de P . Colocando um guarda em cada um dos ângulos reflexos P ficará totalmente vigiado.

A figura 4.3 ilustra um polígono em que são necessários r guardas. ■

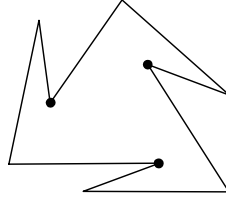


Figura 4.3: Exemplo de um polígono em que são necessários r guardas.

4.3 Guardas em Polígonos Ortogonais

Como já foi referido, é particularmente interessante estudar polígonos ortogonais visto que as maiorias das construções são “ortogonais”. Relativamente à iluminação de pontos, um dos primeiros resultados deve-se a Kahn, Klawe e Kleiman [26].

Teorema 4.2 *Qualquer polígono ortogonal com n vértices, pode ser vigiado com pelo menos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas.*

Prova: A figura 4.4 ilustra um polígono que requer $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas.

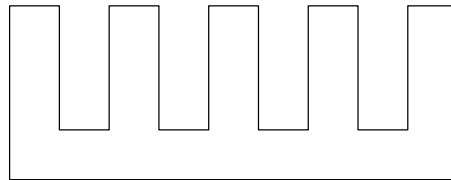


Figura 4.4: Exemplo de um polígono que requer $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas.

Para provar que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas são sempre suficientes, primeiro construímos uma quadrilateralização Q de P , (ver figura 4.5(a)). De seguida, adicionamos duas diagonais a cada quadrilátero de Q para obter um grafo H , (ver figura 4.5(b)).

Prove-se que H é um grafo 4-colorível. Considere-se o grafo dual Q^* de Q : os vértices de Q^* são os quadriláteros de Q e, considera-se que dois vértices de Q^* são adjacentes se as salas correspondentes partilharem a mesma aresta em Q . Podemos concluir que Q^* é uma árvore, (ver figura 4.5(c)). Remova-se um quadrilátero de Q que corresponda a uma folha de Q^* . Isto produz um subgrafo H' de H , tal que, por um argumento indutivo, pode-se assumir que é 4-colorível. Facilmente concluímos que esta coloração pode ser estendida a uma 4-coloração de H . Note-se que em resultado da 4-coloração, todos os vértices de qualquer quadrilátero de Q têm cores diferentes e os vértices de cada classe cromática vigiam P . Ao colocarmos um guarda em cada vértice da menor classe cromática, o resultado segue-se. ■

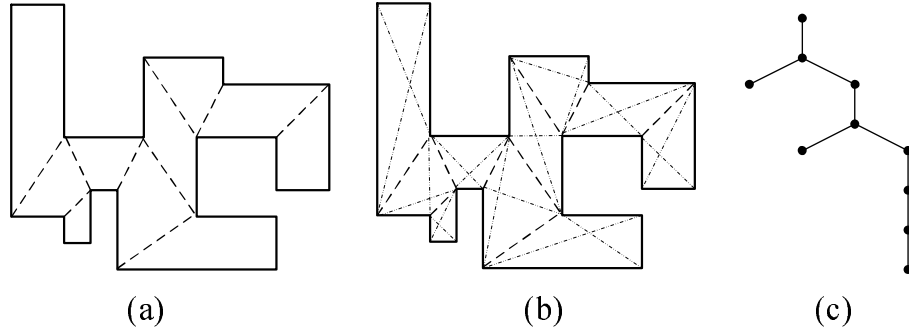


Figura 4.5: (a) Polígono P e respectiva quadrilaterização Q ; (b) Exemplo de um grafo 4-cromático obtido da quadrilaterização; (c) Grafo dual do polígono Q .

Tendo em conta o Lema 2.4, sabe-se que $n = 2r + 4$, assim, o Teorema 4.2 pode ser adaptado: $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{2r+4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$. O algoritmo para localizar $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ guardas num polígono ortogonal de n vértices dos quais r são reflexos, consiste em seis passos distintos.

Algoritmo 4.1 Localizar $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ guardas num polígono ortogonal.

1. Se r for par adicionar um vértice reflexo.
2. Varrer o polígono para encontrar todos os cortes horizontais.
3. Percorrer a fronteira, rotulando a paridade dos cortes.
4. Particionar o polígono em cada corte horizontal ímpar.
5. Para cada peça resultante, alternar a localização dos guardas entre os vértices reflexos.
6. Remover o vértice reflexo extra, se introduzido no passo (1), (ver figura 4.6).

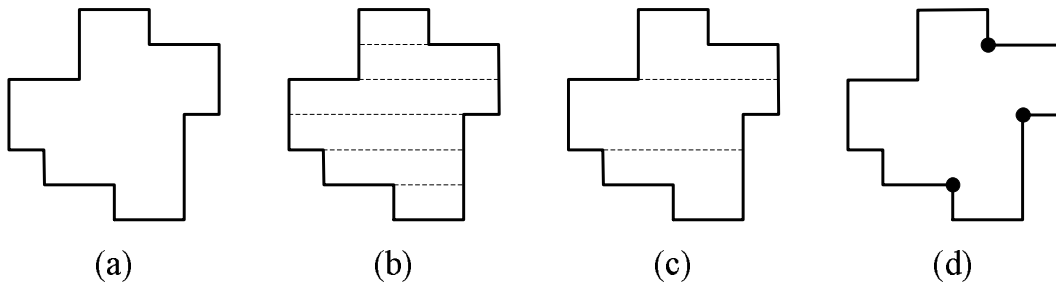


Figura 4.6: Ilustração do Algoritmo 4.1 para um polígono com 5 ângulos reflexos: (a) polígono P ; (b) todos os cortes horizontais de P estão a tracejado; (c) cortes horizontais ímpares de P ; (d) localização dos $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor + 1 = 3$ guardas em P .

4.4 Guardas em Polígonos com Buracos

O primeiro resultado obtido nesta área deve-se a O'Rourke [35]. Considere-se que t é o número de triângulos e que q é o número de quadriláteros obtidos de P através duma triangulação e duma quadrilaterização, respectivamente.

Teorema 4.3 *Seja P polígono com n vértices e h buracos, $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$ guardas combinatoriais são suficientes para dominar qualquer triangulação e, para polígonos ortogonais, $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor = \lceil \frac{q}{2} \rceil$ guardas combinatoriais são suficientes para dominar qualquer quadrilaterização.*

Prova: Primeiro repare-se que as igualdades $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$ e $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor = \lceil \frac{q}{2} \rceil$ obtêm-se por substituição, utilizando o Lema 2.9. Como este teorema é uma extensão directa do Teorema 3.1 e do Teorema 4.2, fica assegurado que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$ e $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lceil \frac{q}{2} \rceil$ guardas são suficientes, quando $h = 0$.

Dado um polígono P com buracos, construa-se uma triangulação T de P e admita-se que esta contém t triângulos. O objectivo da prova é “cortar” o polígono, ao longo das diagonais da triangulação, de forma a remover cada buraco e ligá-lo ao exterior de P . É claro que qualquer buraco deve ter diagonais de T que ligam algum dos seus vértices a outros buracos ou à fronteira externa de P . Ao cortar qualquer uma dessas diagonais pode-se obter uma das duas situações: ou une o buraco a outro, ou liga o buraco ao exterior. Em qualquer um dos casos, cada corte reduz em 1 o número de buracos. É necessário escolher os cortes de forma a que o polígono resultante seja um polígono simples.

Seja T^* o dual da triangulação T . O dual T^* é um grafo planar, admite no máximo grau 3, tem h faces limitadas F_1, \dots, F_h , uma para cada buraco de P . Seja F_0 a face exterior não limitada (exterior do polígono). Escolha-se qualquer face F_i que partilha pelo menos uma aresta e de T com F_0 . Tal face tem que existir, visto que há diagonais de T que ligam a fronteira de P a algum buraco e o dual dessa diagonal em T^* é e . Remova-se e de T^* , faça-se a reunião de F_i a F_0 sem desconexar o grafo (ver figura 4.7).

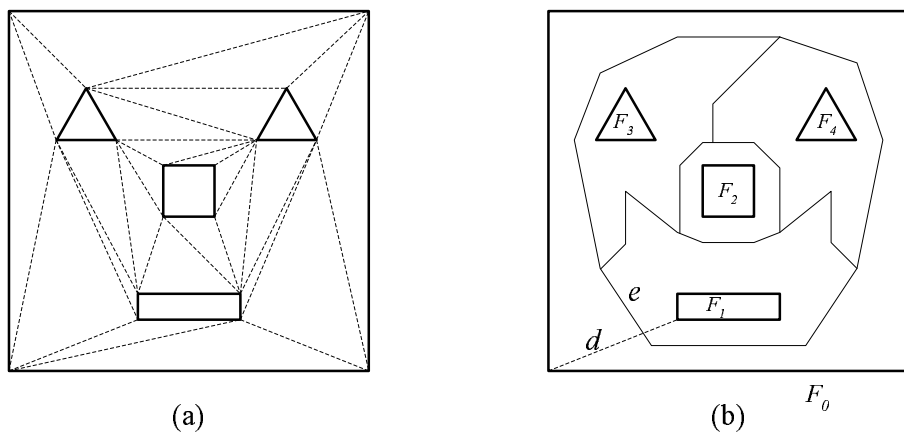


Figura 4.7: Um grafo triangular dum polígono com buracos (a) e o seu dual (b): cada buraco de (a) é cercado por um ciclo em (b).

Note-se que remover uma aresta de T^* é equivalente a cortar P ao longo da correspondente diagonal de T . Continuando este procedimento, remover arestas de T^* partilhadas com a face exterior, obtém-se um grafo conexo.

Seja P' o polígono que resulta de P após “cortar” todos os buracos. Então P' tem $n+2h$ vértices, já que por corte são introduzidos dois vértices. No entanto, como cortes não criam novos triângulos, continuamos a ter t triângulos. Aplicando o Teorema 3.1 a P' , obtém-se que $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$ guardas são suficientes para dominar qualquer triangulação.

A prova para polígonos ortogonais obtém-se da mesma forma, a única diferença é que se invoca o Teorema 4.2 para obter o resultado. ■

Tendo em conta o Lema 4.1, podemos concluir que para qualquer polígono P com n vértices e h buracos, $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ guardas são suficientes para vigiar P e, para polígonos ortogonais, $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$ guardas.

Este resultado deve-se ao facto de Shermer [37] ter conjecturado:

Conjectura 4.1 *Qualquer polígono com n vértices e h buracos pode ser sempre vigiado por $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ guardas em vértices.*

Shermer [37] provou esta conjectura para $h = 1$, mas para $h > 1$ a conjectura continua em aberto.

Considera-se que um polígono ortogonal com buracos é um polígono ortogonal com buracos ortogonais. Em 1982, O'Rourke [35] conjecturou que para vigiar um polígono ortogonal com n vértices e h buracos, são sempre suficientes $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em pontos. Este resultado foi provado, em 1990, por F. Hoffman [24].

O resultado anterior não é válido para guardas em vértices, (ver figura 4.8).

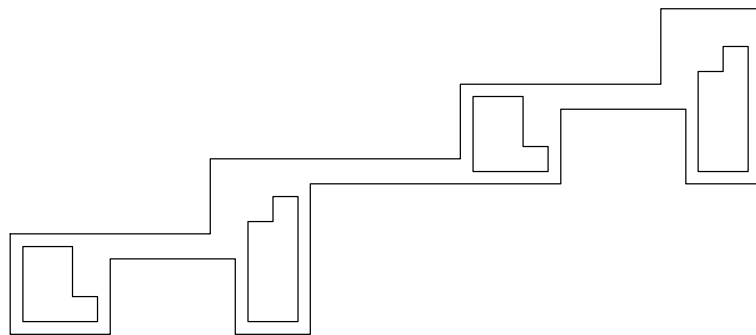


Figura 4.8: Polígono ortogonal de 44 vértices e 4 buracos que requer 12 guardas de vértices.

No entanto, este resultado pode ser facilmente generalizado, o que levou Shermer [37] a conjecturar:

Conjectura 4.2 *São suficientes $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor$ guardas em vértices para vigiar qualquer polígono ortogonal com n vértices e h buracos.*

A conjectura seguinte também se deve a Hoffman [37], esta é similar à de Shermer mas não equivalente.

Conjectura 4.3 *São suficientes $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ guardas em vértices para vigiar qualquer polígono ortogonal com n vértices e h buracos, (ver figura 4.9).*

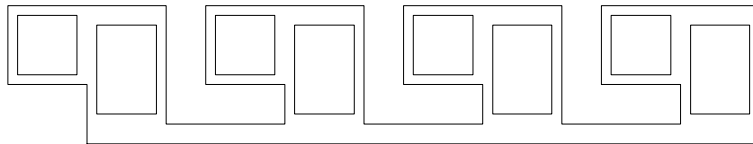


Figura 4.9: Exemplo de um polígono que requer $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ guardas em vértices

A Conjectura 4.3 não contradiz a de Shermer, pois os polígonos de Hoffman têm $n = 14k$ vértices e $h = 2k$ buracos e, para esta escolha particular, tem-se que $\lfloor \frac{n+h}{4} \rfloor = \lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$.

4.5 Guardas Móveis em Arestas

Nesta secção, explora-se uma interessante variante do teorema da Galeria de Arte proposta por Toussaint [37]. Mais do que mudar a estrutura do polígono, Toussaint propôs que se alterasse a mobilidade dos guardas. Especificamente, que estes possam mover-se nas arestas do polígono.

Problema 4.1 *Qual é o número mínimo de guardas em arestas que são necessários para vigiar um polígono com n lados?*

Um motivo para considerar este problema interessante, é por exemplo, quando a segurança da Galeria de Arte depende de guardas humanos. Outra razão deve-se à interligação entre os guardas em arestas e a noção de visibilidade de aresta, introduzida no Capítulo 3.

Toussaint [37] também conjecturou:

Conjectura 4.4 *Excepto para alguns polígonos, são sempre suficientes $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em arestas para vigiar qualquer polígono com n vértices.*

Na figura 4.10(a), é apresentado um polígono que necessita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em arestas para ficar completamente vigiado. Os únicos dois polígonos conhecidos que contrariam a Conjectura 4.4 estão ilustrados na figura 4.10(b). Estes dois polígonos devem-se a Paige e Shermer [37].

A Conjectura 4.4 continua em aberto.

O primeiro resultado positivo nesta direcção deve-se a O'Rourke [36], utilizou guardas móveis em diagonais disjuntas de P .

Teorema 4.4 *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas móveis para vigiar qualquer polígono com $n \geq 4$ vértices.*

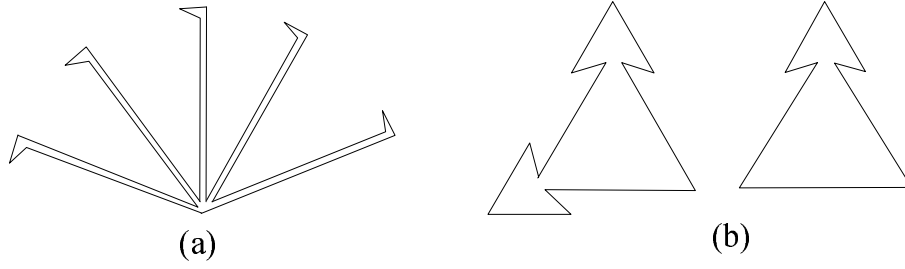


Figura 4.10: Exemplo de três polígonos: (a) um que requer $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em arestas; (b) e dois que contrariam a conjectura 4.4.

Nesta secção, será apresentada a demonstração dada por O'Rourke [36] do Teorema 4.4. Esta prova é idêntica à prova de Chvátal do Teorema Clássico da Galeria de Arte, [3]. A prova será feita tendo em conta os conceitos de *grafo triangular* e de *guardas combinatoriais* introduzidos no início deste capítulo. Mais uma vez, o Lema 4.1 vai ser uma preciosa ajuda para provar a suficiência de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas móveis.

Antes de se iniciar a prova, convém definir e relacionar alguns conceitos que serão utilizados em vários casos da prova do Teorema 4.4. Um dos mais importantes destes conceitos é a “contracção de arestas”:

Definição 4.10 *Seja P um polígono simples e G um grafo triangular de P . Sejam ainda u e v os dois nós de G correspondentes aos extremos duma aresta e de P . A contracção de e , é a transformação que remove os nós u e v de G , substituindo-os por um novo nó x adjacente a todos os nós que eram adjacentes a u e v , (compare as figuras 4.11 e 4.14).*

É importante referir que a contracção duma aresta provoca uma transformação no grafo e não no polígono.

Lema 4.3 *Seja G um grafo triangular dum polígono simples P e G' o grafo resultante da contracção duma aresta de G . Então, existe um polígono simples P' do qual G' é um grafo triangular.*

Prova: Constrói-se a figura com arestas curvas correspondentes a G' e depois substitui-se as curvas por segmentos de recta de modo a obter P' .

Seja P_t a figura planar correspondente à triangulação G , seja ainda e a aresta contraída que admite como extremos u e v em P_t . Sejam os vértices y_0, \dots, y_i e z_0, \dots, z_j adjacentes, por diagonais ou por arestas, a u e a v , respectivamente. Considere-se que $y_0 = v$ e $z_0 = u$ e ordene-se os vértices pela sua ordem angular, (ver figura 4.11).

Note-se que $y_1 = z_1$ é o vértice de maior ordenada do triângulo de base e .

Introduza-se um vértice x sobre e e ligue-se os vértices de $y = \{y_0, \dots, y_i\}$ e de $z = \{z_0, \dots, z_j\}$ a x da seguinte forma

- (1) ligue-se y_1 a x , tal pode ser feito sem cruzar qualquer diagonal pois y_1 é o vértice de maior ordenada do triângulo de base e ;
- (2) remova-se a diagonal $[uy_1]$;
- (3) ligue-se y_2 a x por uma linha totalmente contida na região $[xy_1y_2u]$, a linha pode ter que ser curva mas de novo não há a necessidade de cruzamentos;

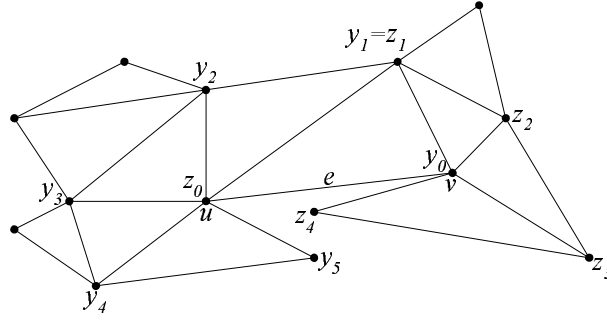


Figura 4.11: Um grafo triangular.

- (4) remova-se a diagonal $[uy_2]$;
- (5) prossiga-se com este raciocínio até todos os y 's ficarem adjacentes a x , (ver figura 4.12).

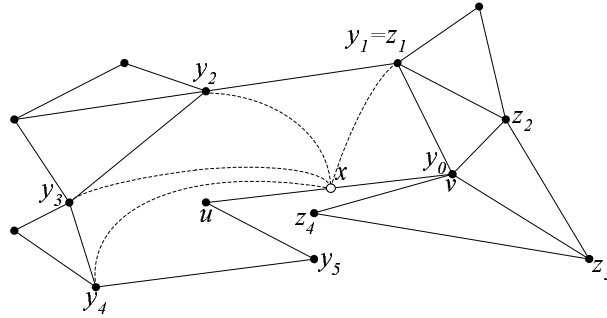


Figura 4.12: Várias diagonais que estavam ligadas a u passaram a estar ligadas a x .

Aplique-se o mesmo procedimento para os vértices de z . Após estas operações obtém-se uma figura planar cujas ligações são as mesmas que as de G' , (ver figura 4.13).

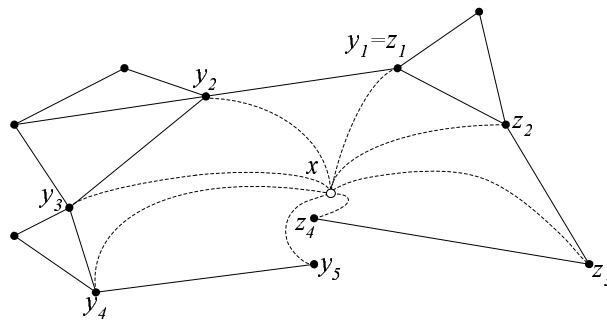


Figura 4.13: Todos os arcos adjacentes a u e v passaram a estar adjacentes a x .

Finalmente, aplique-se o Teorema de Fary [21]: para qualquer grafo planar desenhado no plano, provavelmente com linhas curvas, existe um homeomorfismo no plano que o transforma num grafo, este com segmentos de recta, tal que os vértices do primeiro são imagens dos vértices do outro e o mesmo acontece com as arestas.

Aplicando tal homeomorfismo na figura construída obtém-se P' , um polígono que admite G' como um dos seus grafos triangulares, (ver figura 4.14). ■

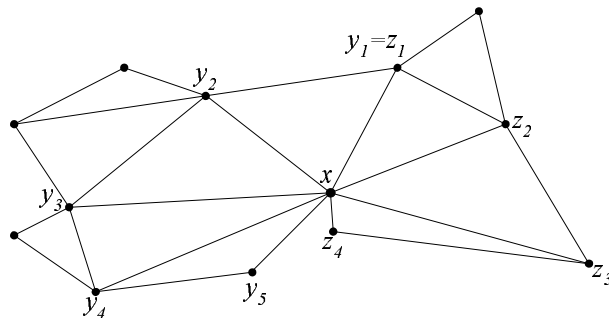


Figura 4.14: Substituíram-se os arcos adjacentes a x por segmentos de recta, obtendo-se um grafo com a mesma estrutura do da figura 4.13.

Lema 4.4 *Suponha-se que $f(n)$ guardas combinatoriais em diagonais são sempre suficientes para dominar qualquer grafo triangular com n nós. Se G for um grafo triangular, arbitrário, dum polígono P , com um guarda em vértice colocado em cada um dos seus nós, então $f(n-1)$ guardas em diagonais são sempre suficientes para dominar G .*

Prova: Seja u o nó em qual o guarda está colocado e seja v um nó adjacente a u por um arco correspondente à aresta e de P . Faça-se a contracção da aresta e em G e obtenha-se o grafo G' de $n-1$ nós. Pelo Lema 4.3, este é um grafo triangular e, consequentemente, pode ser dominado por $f(n-1)$ guardas em diagonais. Seja x o nó de G' que substitui u e v de G . Suponhamos que nenhum guarda é colocado em x no domínio de G' . Então, a mesma localização dos guardas dominará G , já que o guarda colocado em u domina o triângulo de base e , e os restantes triângulos de G dominam, da mesma forma, G' . Compare-se de novo as figuras 4.11 e 4.14. Se um guarda é colocado em x no domínio de G' , então este guarda pode ser escolhido para v em G . Os restantes guardas mantêm as suas posições. De novo, qualquer triângulo de G está dominado. ■

O lema anterior é válido para outros tipos de guardas. No entanto, para a demonstração do Teorema 4.4 apenas interessa utilizar guardas em diagonais.

Os três lemas que se seguem indicam o número de guardas em diagonais que dominam grafos triangulares com 5, 7 e 9 nós.

Lema 4.5 *Qualquer grafo triangular dum pentágono ($n=5$) pode ser dominado por um único guarda combinatorial em diagonal. Esta diagonal admite para um dos extremos qualquer nó seleccionado.*

Prova: Seja G um grafo triangular dum pentágono e seja o nó seleccionado designado por v_0 . É fácil verificar que existem apenas cinco triangulações diferentes. Em cada um dos casos basta um único guarda combinatorial em diagonal, com um dos extremos no nó v_0 , para dominar o grafo, (ver figura 4.15). ■

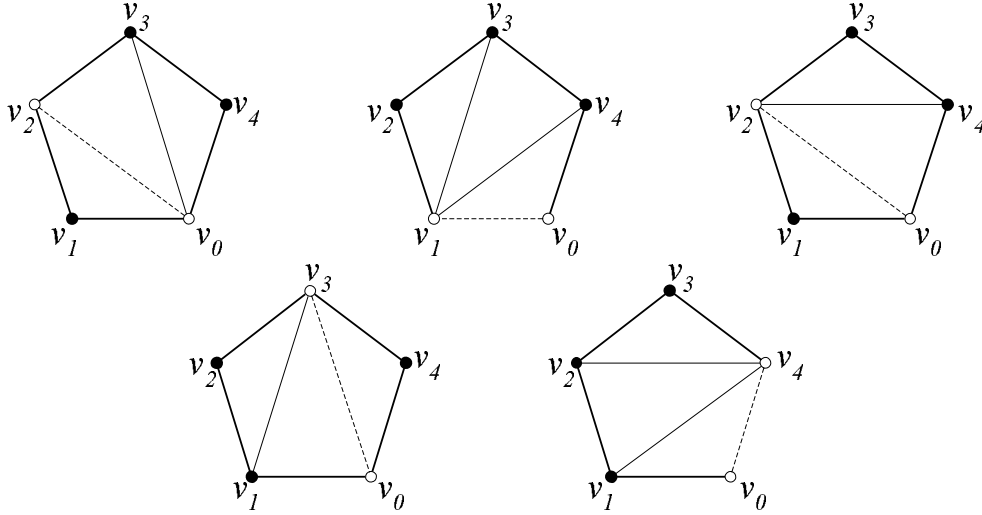


Figura 4.15: Um pentágono pode ser dominado por um único guarda em diagonal (a tracejado) com um dos extremos em v_0 .

Lema 4.6 *Qualquer grafo triangular dum heptágono ($n = 7$) pode ser dominado por um único guarda combinatorial em diagonal.*

Prova: Seja G um grafo triangular dum heptágono e seja d uma diagonal interna arbitrária. Esta diagonal particiona as sete arestas da fronteira de G de duas formas possíveis: $2 + 5 = 7$ ou $3 + 4 = 7$. É óbvio que a partição $1 + 6 = 7$ é impossível. A prova será feita com base nos dois casos anteriormente referidos.

Caso 1: $2 + 5 = 7$. Considere-se $d = [v_0v_2]$. Seja T o triângulo que admite como um dos lados d , dois dos vértices de T são v_0 e v_2 e o terceiro vértice pode ser v_3 , v_4 , v_5 ou v_6 . Apenas dois destes casos são distintos:

- 1a:** Considere-se $T = [v_0v_2v_3]$. Então $[v_0v_3v_4v_5v_6]$ é um pentágono, (ver figura 4.16(a)). Pelo Lema 4.5, este pentágono pode ser coberto por uma único guarda em diagonal com um extremo no nó v_0 . Este guarda domina todo o grafo.
- 1b:** Considere-se $T = [v_0v_2v_4]$. Escolha-se a diagonal $[v_0v_4]$ para o guarda, (ver figura 4.16(b)). Tendo em conta que o quadrilátero $[v_0v_4v_5v_6]$ admite uma triangulação, todo o G é dominado.

Caso 2: $3 + 4 = 7$. Seja $d = [v_0v_3]$. Então ambas as formas, de triangular o quadrilátero $[v_0v_1v_2v_3]$, conduz-nos a uma situação idêntica à do Caso 1a. ■

Lema 4.7 *Qualquer grafo triangular dum eneágono ($n = 9$) pode ser dominado por dois guardas combinatoriais em diagonais tal que um dos seus extremos coincide com qualquer nó seleccionado.*

Prova: Seja G um grafo triangular dum eneágono, seja v_0 o nó seleccionado e seja ainda d qualquer diagonal que admite v_0 como extremo. Esta diagonal particiona as nove arestas da fronteira de G de três formas possíveis: $2 + 7 = 9$, $3 + 6 = 9$ ou $4 + 5 = 9$.

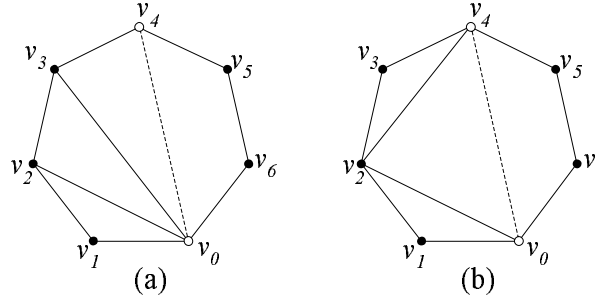


Figura 4.16: Um heptágono pode ser dominado por um único guarda em diagonal.

Caso 1: $2 + 7 = 9$. Considere-se $d = [v_0v_2]$. Seja T o triângulo que admite como um dos lados d , dois dos vértices de T são v_0 e v_2 e o terceiro vértice pode ser v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 ou v_8 . Apenas três destes casos são distintos:

Caso 1a: Consider-se $T = [v_0v_2v_3]$. Pelo Lema 4.6, o heptágono $[v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8]$ pode ser dominado por um único guarda, escolha-se a diagonal $[v_0v_2]$ para o segundo guarda, (ver figura 4.17(a)).

Caso 1b: Consider-se $T = [v_0v_2v_4]$. Pelo Lema 4.6, o heptágono $[v_0v_2v_4v_5v_6v_7v_8]$ pode ser dominado por um único guarda, escolha-se a diagonal $[v_0v_2]$ para o segundo guarda, (ver figura 4.17(b)).

Caso 1c: Consider-se $T = [v_0v_2v_5]$. Utilizando de novo o Lema 4.6, domine-se o hexágono $[v_0v_1v_2v_3v_4v_5]$ com um guarda e, utilizando o Lema 4.5, domine-se o pentágono $[v_0v_5v_6v_7v_8]$ com um guarda em diagonal cujo um dos extremos é v_0 , (ver figura 4.17(c)).

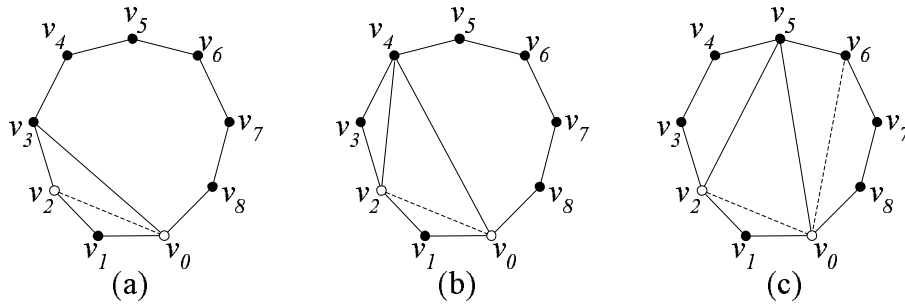


Figura 4.17: Um eneágono pode ser dominado por dois guardas em diagonais, com um dos extremos no nó v_0 .

Caso 2: $3 + 6 = 9$. Seja $d = [v_0v_3]$, a situação é idêntica ao Caso 1a.

Caso 3: $4 + 5 = 9$. Seja $d = [v_0v_5]$, a situação é idêntica ao Caso 1c. ■

Lema 4.8 *Seja P um polígono com $n \geq 10$ vértices e G um grafo triangular de P . Existe uma diagonal d de G que particiona G em duas peças, uma das quais contém $k = 5, 6, 7$ ou 8 arcos que correspondem às arestas de P .*

Prova: Escolha-se uma diagonal d de G de modo que esta separe um número mínimo de arestas do polígono, i.e, pelo menos 5. Seja $k \geq 5$ este número mínimo e enumere-se os vértices por v_0, v_1, \dots, v_{n-1} de tal modo que $d = [v_0 v_k]$, (ver figura 4.18). A diagonal d é a base dum triângulo T cujo terceiro vértice é v_t , $0 \leq t \leq k$. Como k é minimal, tem-se que $t \leq 4$ e $k - t \leq 4$. Combinando estas duas desigualdades obtém-se o pretendido, $k \leq 8$. ■

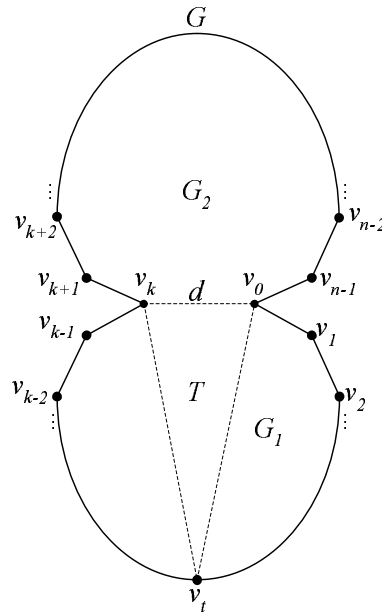


Figura 4.18: A diagonal d separa G em duas partes, uma (G_1) que partilha $5 \leq k \leq 8$ arestas com G .

Teorema 4.5 *Qualquer grafo triangular G dum polígono com $n \geq 4$ vértices pode ser dominado por $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas combinatoriais em diagonais.*

Prova: Os Lemas 4.5, 4.6 e 4.7, validam o teorema para $5 \leq n \leq 9$. Considere-se que $n \geq 10$ e que o teorema é válido para todo $n' < n$. O Lema 4.8, garante a existência de uma diagonal d que particiona G em dois grafos G_1 e G_2 tal que G_1 contém k arestas na fronteira de G , com $5 \leq k \leq 8$. Considere-se os três casos:

Caso 1: Seja $k = 5$ ou $k = 6$. O grafo G_1 tem $k + 1 \leq 7$ arestas incluindo d . Pelo Lema 4.6, G_1 pode ser dominado com um único guarda em diagonal. O grafo G_2 tem $n - k + 1 \leq n - 5 + 1 = n - 4$ arestas incluindo d e, pela hipótese de indução, pode ser dominado com $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardas em diagonais. Assim, como $G = G_1 \cup G_2$, este pode ser dominado por $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em diagonais.

Caso 2: Seja $k = 7$. A presença de qualquer uma das diagonais $[v_0 v_6]$, $[v_0 v_5]$, $[v_1 v_7]$ ou $[v_2 v_7]$ contraria a minimalidade de k . Consequentemente, o triângulo T em G_1 , que admite como lado d , tanto pode ser $[v_0 v_3 v_7]$ como $[v_0 v_4 v_7]$; como estes casos são equivalentes, suponha-se que T é $[v_0 v_3 v_7]$. O quadrilátero $[v_0 v_1 v_2 v_3]$ admite duas triangulações distintas, estas serão consideradas separadamente.

- 2a:** $[v_1v_3]$ pertence à triangulação. Pelo Lema 4.5, é possível dominar o pentágono $[v_3v_4v_5v_6v_7]$ com um guarda em diagonal. Considere-se que esta diagonal tem um dos extremos no nó v_3 . Este guarda domina G_1 . Como G_2 tem $n - 7 + 1 = n - 6$ arestas na fronteira, pela hipótese de indução, pode ser dominado por $\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardas em diagonais. Como $G = G_1 \cup G_2$, fica assegurado que G pode ser dominado por $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em diagonais.
- 2b:** $[v_0v_2]$ pertence à triangulação. Construa-se o grafo G_0 unindo os triângulos $T = [v_0v_3v_7]$ e $T' = [v_0v_2v_3]$ a G_2 , (ver figura 4.19). O grafo G_0 tem $n - 7 + 3 = n - 4$ arestas e, pela hipótese de indução, pode ser dominado por $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardas em diagonais. Em tal domínio, pelo menos um dos vértices de $T' = [v_0v_2v_3]$ tem que ser o extremo da diagonal em que o guarda vai ser colocado. Assim, existem três possibilidades:
- (i) se o extremo for o nó v_0 , então G_0 poderá ser estendido pela inclusão do triângulo $[v_0v_1v_2]$ sem necessitar de mais guardas;
 - (ii) se o extremo for o nó v_2 , então G_0 poderá ser estendido pela inclusão do triângulo $[v_0v_1v_2]$;
 - (iii) se o extremo for o nó v_3 , então existirão três localizações possíveis para o outro extremo da diagonal (onde vai ser colocado o guarda). Se este extremo estiver no nó v_0 ou no nó v_2 , as condições serão idênticas aos dois casos anteriores. Se estiver no nó v_7 , substitua-se a diagonal $[v_3v_7]$ por $[v_0v_7]$. Qualquer triângulo que já estava dominado continua dominado e, novamente, G_0 pode ser estendido pela inclusão do triângulo $[v_0v_1v_2]$.

Retirando a G o pentágono $[v_3v_4v_5v_6v_7]$, o resto pode ser dominado por $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ guardas em diagonais. Pelo Lema 4.5, um pentágono apenas requer um único guarda em diagonal, resultando num total de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em diagonais para G .

Caso 3: Seja $k = 8$. O grafo G_1 tem $k + 1 = 9$ arestas na fronteira e, pelo Lema 4.7, pode ser dominado por dois guardas em diagonais, uma das quais admite como extremo v_0 . Considere-se agora que o grafo G_2 tem $n - k + 1 = n - 7$ arestas na fronteira. Pelo Lema 4.4, o guarda colocado no nó v_0 permite que o grafo G_2 seja dominado por $f(n - 7 - 1) = f(n - 8)$ guardas em diagonais. A função $f(n')$ especifica um número de guardas em diagonais que são sempre suficientes para dominar um grafo triangular de n' nós. Pela hipótese de indução, $f(n') = \lfloor \frac{n'}{4} \rfloor$. Assim, $\lfloor \frac{n-8}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$ guardas em diagonais são suficientes para dominar G_2 . Como já foi referido, G_1 pode ser dominado por dois guardas em diagonais e tendo em conta que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$ são suficientes para vigiar G_2 , podemos concluir que G pode ser dominado por $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas em diagonais. ■

Já nos encontramos nas condições de provar o Teorema 4.4.

Prova do Teorema 4.4: Combinando o Lema 4.1 e o Teorema 4.5 prova-se o teorema para guardas em diagonais, ou seja, guardas móveis. ■

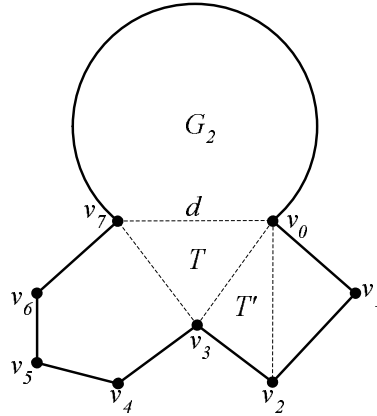


Figura 4.19: G_0 é obtido reunindo T e T' a G_2 .

Este resultado foi particularizado por A. Aggarwal [2] para polígonos ortogonais. Aggarwal provou que são sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardas móveis para vigiar qualquer polígono ortogonal com n vértices. Para isso, Aggarwal recorreu a lemas que estabelecem uma relação entre uma diagonal numa quadrilaterização e a estrutura local de um polígono. A partir de agora e até ao final desta secção, “diagonal” significa diagonal de uma quadrilaterização. Recorde-se que um polígono ortogonal admite unicamente arestas horizontais e verticais. Considera-se que as arestas a e b estão do mesmo lado de d , se estiverem na mesma peça de P quando este é submetido a uma partição à custa de d ; note-se que a e b podem estar em metades do plano opostas definidas por d mas ainda na mesma peça.

Lema 4.9 *Seja a e b arestas adjacentes de P e localizadas do mesmo lado da diagonal d . Então a e b têm a mesma direcção.*

Prova: Considere-se que a diagonal d particiona P em dois subpolígonos, seja um deles P_1 . Sem perda de generalidade, oriente-se d com declive positivo em relação ao polígono P_1 de modo que a e b fiquem na metade de baixo. Assuma-se, por contradição, que a e b têm direcções diferentes. Então existem cinco possíveis e distintos arranjos para a e b : para cima, baixo, esquerda ou direita a partir dos extremos de d , como mostra a fig 4.20.

Os outros três possíveis arranjos forçam a que a e b não estejam do mesmo lado de d . Primeiro, note-se que nos cinco casos, a adição de um ângulo recto acima de d produz um novo polígono ortogonal P' . Seja q_1 o número de quadriláteros de P_1 . Então a soma dos ângulos internos de P' é $2\pi q_1 + \pi$ radianos. Mas isto implica que P' não admite uma quadrilaterização, contrariando o Teorema 2.6. ■

Nenhum ângulo interno de uma quadrilaterização pode ser maior do que $\frac{3\pi}{2}$ radianos, então apenas quatro configurações são possíveis para d , a e b , como ilustra a figura 4.21.

Esta observação será considerada no Lema 4.10 para futuras referências.

Lema 4.10 *As únicas configurações possíveis para a diagonal d de modo a que as suas duas arestas adjacentes, a e b , estejam do mesmo lado (provavelmente após rotação e reflexão de modo a orientar d com declive positivo), são as exibidas na figura 4.21.*

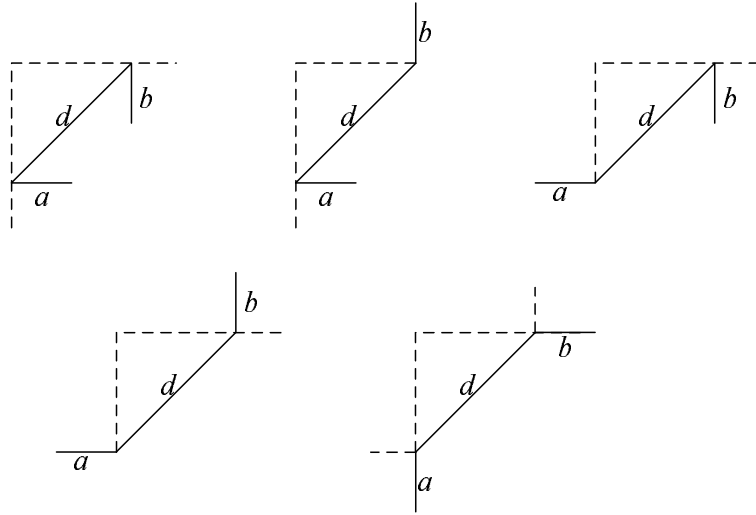


Figura 4.20: Os cinco possíveis arranjos quando a e b têm orientações opostas e pertencem ao mesmo lado de d . As linhas a cheio representam as possíveis orientações das arestas do outro lado de d ; as linhas a tracejado indicam um adicional ângulo recto que forma o subpolígono.

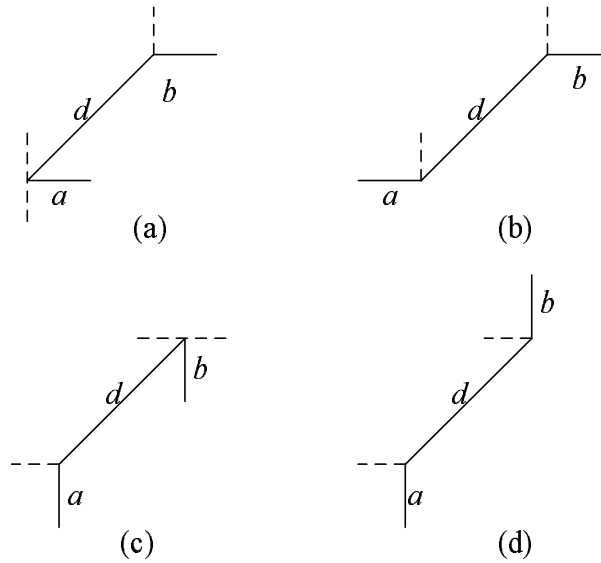


Figura 4.21: Os quatro possíveis arranjos de a e b quando d está na orientação standard. As linhas a cheio indicam as possibilidades para as arestas adjacentes a d e a a e b .

Pretende-se agora mostrar que um quadrilátero de grau 4 só pode ter uma configuração. Uma configuração é definida pela orientação das arestas no polígono, adjacentes a cada vértice dum quadrilátero e o tipo de vértices (convexo/reflexo).

Designa-se, um vértice reflexo cujo ângulo externo está no primeiro quadrante, por tipo 1, no segundo quadrante por tipo 2 e, da mesma forma, defina-se tipo 3 e 4.

Lema 4.11 *Seja $[uvxy]$ um quadrilátero de grau 4 em Q^* (dual da quadrilaterização Q de P) para algum polígono ortogonal P . Então u, v, x e y são vértices reflexos de P do tipo 1, 2, 3 e 4 no sentido anti-horário.*

Prova: Por contradição, assumamos que pelo menos u é convexo. Sem perda de generalidade seja u o canto inferior esquerdo como ilustra a figura 4.22(a).

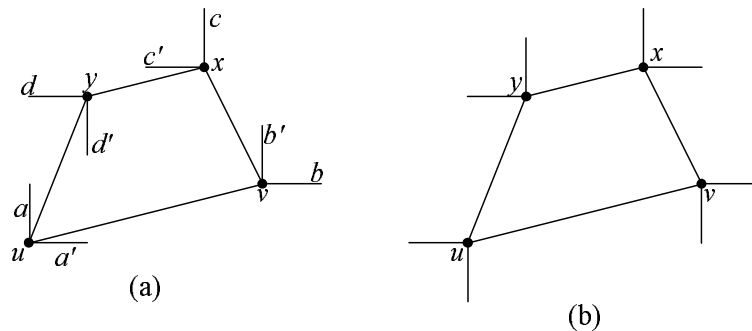


Figura 4.22: Se u é convexo (a), d' tem que ser interna a $[uvxy]$; se u é reflexo (b), o quadrilátero de grau 4 tem uma única configuração.

Assim, a figura 4.21(a) mostra que uma aresta a' força a que b e b' tenham as orientações ilustradas, na mesma figura, em v ; o mesmo acontece em x , b' força as orientações de c e c' ; em y , c' força as orientações de d e d' . Mas assim, d' está no interior de $[uvxy]$, contradizendo que $[uvxy]$ é um quadrilátero interno.

Considere-se agora que u é um vértice reflexo do tipo 3. Seguindo o mesmo raciocínio força as configurações mostradas na figura 4.22(b), validando o lema. ■

As possíveis configurações para quadriláteros de menor grau serão evidenciadas nos lemas que se seguem. As provas são similares à do lema anterior, aplica-se constantemente o lema 4.10 e, deste modo, apenas se fará um esboço das mesmas.

Lema 4.12 *Um quadrilátero de grau 3 pode ter apenas uma das quatro configurações possíveis ilustradas na figura 4.23.*

Prova: Seja e a aresta do quadrilátero partilhado com o polígono. É fácil mostrar, usando o Lema 4.10, que ambos os extremos de e não podem ser convexos. Se um dos extremos for convexo e o outro for reflexo, obter-se-á a figura 4.23(a).

Se ambos forem reflexos, três configurações serão possíveis e estas estão ilustradas nas figuras 4.23(b)-(d). ■

Lema 4.13 *Um quadrilátero de grau dois pode ter apenas uma das seis configurações ilustradas na figura 4.24.*

Prova: Se as duas arestas partilhadas com o polígono forem não-adjacentes, então as três configurações mostradas nas figuras 4.24(a)-(c) são possíveis.

Se as arestas partilhadas forem adjacentes, então as três configurações ilustradas nas figuras 4.24(d)-(f) são possíveis. ■

Lema 4.14 *Um quadrilátero de grau 1 pode ter apenas uma das duas configurações ilustradas na figura 4.25.*

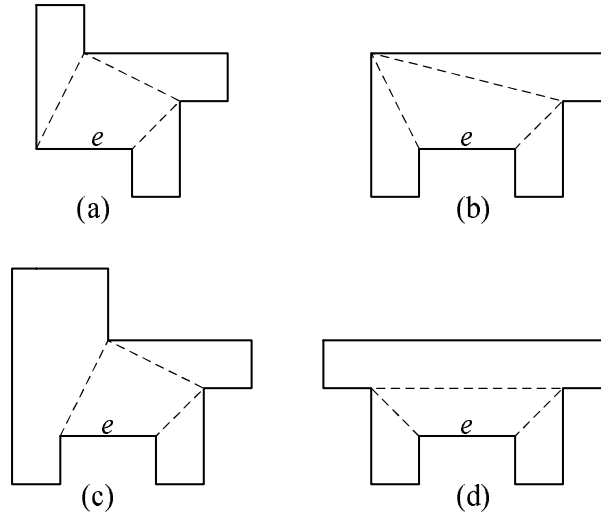


Figura 4.23: As quatro configurações possíveis para um quadrilátero de grau 3.

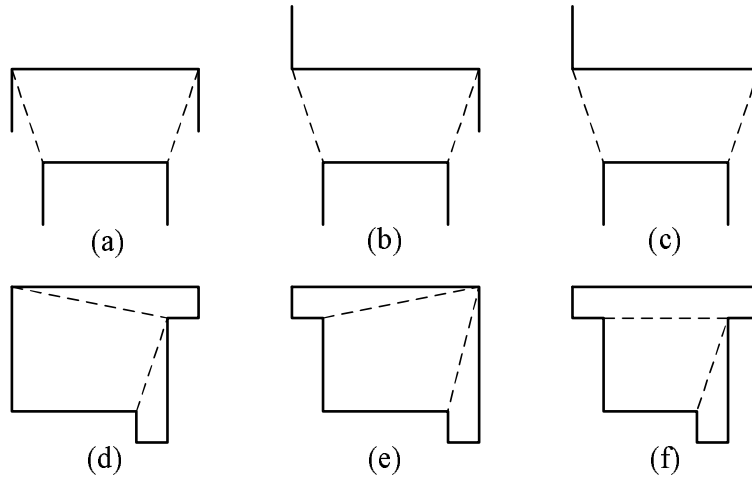


Figura 4.24: As seis configurações possíveis para um quadrilátero de grau 2.

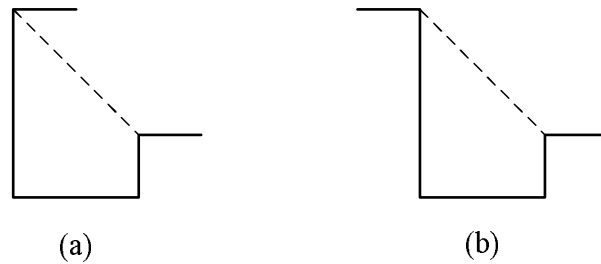


Figura 4.25: As duas configurações possíveis para um quadrilátero de grau 1.

De seguida, exploram-se três lemas que têm o mesmo espírito do Lema 4.4. Todos têm o mesmo princípio: “Suponha-se que a hipótese de indução é verificada e que é dado um polígono com um (ou mais) guarda(s) localizado(s) em regiões livres. Então, um guarda adicional X é suficiente para vigiar P ”.

A hipótese de indução, que é a premissa destes lemas, é:

Hipótese de Indução (HI): Qualquer polígono ortogonal com $q' < q$ quadriláteros pode ser coberto por $\lfloor \frac{3q'+5}{8} \rfloor$ guardas móveis.

Sejam a e b as duas arestas adjacentes a uma diagonal d , situadas do mesmo lado de d e com a mesma paridade. Então, ou se tem a figura 4.21(a) ou se tem a figura 4.21(c). Estas situações são claramente idênticas, após uma reflexão e uma rotação, e apenas se considerará a figura 4.21(a).

Definição 4.11 *Defina-se por sombra parcial de d a região triangular fechada definida à custa de d , de a e ou dum segmento de recta vertical com extremo em x (extremo direito de a) ou dum vértice incidente em d e b , o que estiver mais à esquerda, (ver figura 4.26).*

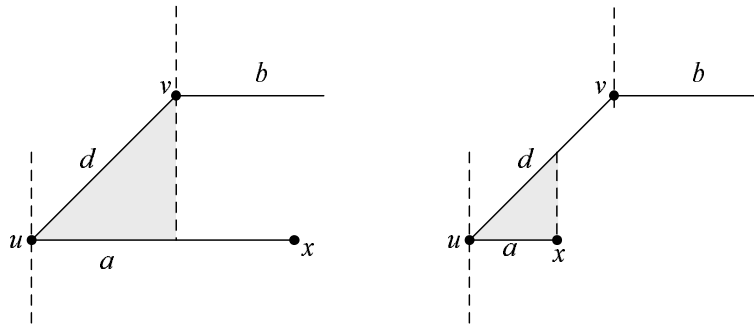


Figura 4.26: A sombra parcial de uma diagonal.

Lema 4.15 *A sombra parcial duma diagonal numa quadrilaterização de um polígono ortogonal é vazia.*

Prova: A sombra parcial é apenas definida nas situações ilustradas na figura 4.26. Seja u o vértice incidente em d e a , como na figura. Assuma-se que a sombra não é vazia. Seja e a aresta vertical que está situada o mais à esquerda possível na sombra. Então u e e devem ser uma parte da quadrilaterização Q . Mas não existe nenhum vértice que sirva para o quarto vértice de Q : não pode estar à direita de e , senão Q seria não-convexa; tendo em conta a posição geral assumida, não pode ser colinear a e ; nem pode estar à esquerda de e , já que por definição e é a aresta situada mais à esquerda. ■

Definição 4.12 *Diz-se que a aresta e é uma aresta convexa dum polígono P , se os dois extremos de e forem convexos.*

Lema 4.16 *Seja P um polígono que admite uma quadrilaterização com q quadriláteros. Se P tiver um guarda localizado ao longo duma aresta convexa e , assumindo HI, P poderá ser vigiado com $\lfloor \frac{3(q-1)+5}{8} \rfloor$ guardas adicionais.*

Prova: A prova é feita por indução sobre q . O lema é trivial para $q = 1$. Assuma-se que é verdadeiro para $q' < q$. Seja $Q = [uvxy]$ o quadrilátero que contém $e = [uv]$. A prova prossegue com casos que dependem do grau de Q .

caso 1. Q tem grau 1. Ou $[vx]$ (ou simetricamente $[yu]$) ou $[xy]$ é a única diagonal interna de Q . Em ambos os casos, ilustrados na figura 4.27, um corte através de x particiona P num rectângulo coberto e num polígono que admite uma quadrilaterização de $q - 1$ quadriláteros, pelo Lema 2.8. Aplicando a HI o Lema é válido.

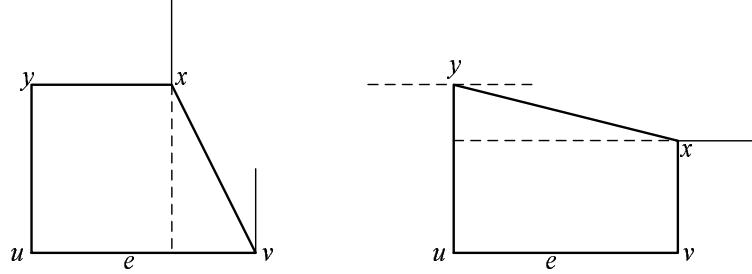


Figura 4.27: Se $[uvxy]$ tem grau 1 e e é vigiada, um quadrilátero pode ser removido.

caso 2. Q tem grau 2. As diagonais internas de Q ou são adjacentes ou não.

caso 2.1 As diagonais não são adjacentes. A única situação possível está ilustrada na figura 4.28(a), correspondente à figura 4.24(a). Os dois cortes ilustram

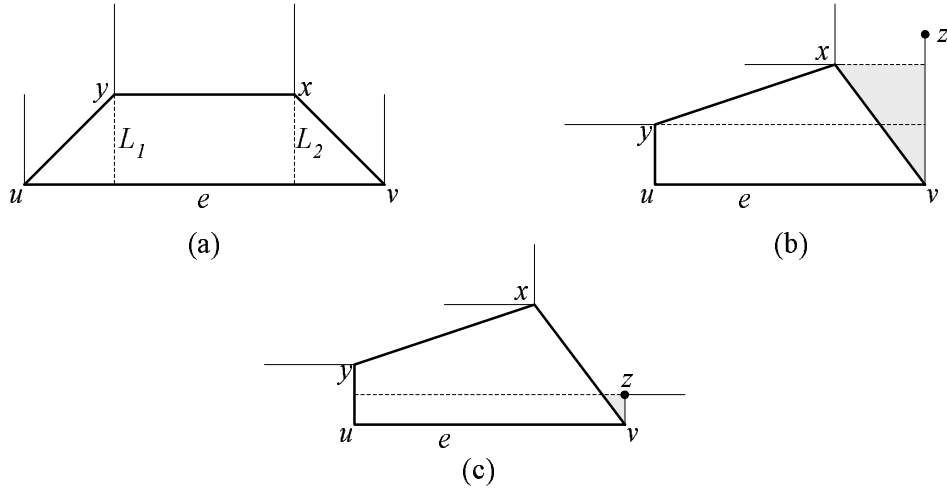


Figura 4.28: Se $[uvxy]$ tem grau 2 e e é vigiada, um quadrilátero pode ser removido, ou por indução (a) ou por remoção dum rectângulo (b) e (c).

a partição de P em três peças: um rectângulo limitado pelos cortes e dois polígonos ortogonais P_1 e P_2 que admitem quadrilaterizações com q_1 e q_2 quadriláteros, respectivamente. Pelo Lema 2.8, $q_1 + q_2 + 1 = q$. Agora repare-se que o guarda que está ao longo de e é um guarda entre dois vértices convexos de cada um dos polígonos P_1 e P_2 . Já que $q_1 < q$ e $q_2 < q$, podemos aplicar a hipótese de indução a este lema. Assim, P pode ser vigiado com $\lfloor \frac{3(q_1-1)+5}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3(q_2-1)+5}{8} \rfloor$ guardas adicionais. Uma tediosa análise mostra que isto é menor ou igual a $\lfloor \frac{3(q-1)+5}{8} \rfloor$, o estabelecido pelo lema.

caso 2.2 As diagonais são adjacentes. Apenas a figura 4.24(d) é possível, que irá ser particionada em dois casos, ilustrados pela figura 4.28(b) e pela figura 4.28(c). Sejam $[vx]$ e $[xy]$ as diagonais de Q ; x deve ter maior ordenada que y . As duas figuras distinguem-se pelo facto de z , o extremo de maior ordenada da aresta vertical incidente em v , ter maior ou menor ordenada do que y . No primeiro caso, (ver figura 4.28(b)), um corte por y e, no caso seguinte (ver figura 4.28(c)), um corte por z são garantidos (a sombra parcial de $[vx]$ é vazia (Lema 4.15)), para construir uma partição de P , num rectângulo coberto e num polígono, que admite uma quadrilaterização com $q - 1$ quadriláteros. Aplique-se a HI e o lema verifica-se.

caso 3. Q tem grau 3. Este caso não é possível. Esta impossibilidade advém imediatamente das possíveis configurações mostradas na figura 4.23; e não é uma aresta convexa em qualquer uma das possíveis configurações. ■

Lema 4.17 *Se P for um polígono que admite uma quadrilaterização de q quadriláteros e com dois guardas colocados em arestas consecutivas $[uv]$ e $[vx]$, então assumindo HI, P pode ser coberto com $\lfloor \frac{3(q-2)+5}{8} \rfloor$ guardas adicionais.*

Prova: A prova é similar à do lema anterior. A estrutura é claramente a mesma nesta prova, mas com $[vx]$ a fazer o papel de $[uv]$. Sejam z, u, v, x, y e w os vértices consecutivos na fronteira de P . Seja Q o quadrilátero que inclui $[vx]$; Q não é necessariamente $[uvxy]$.

caso 1. O grau de Q é 1. Ou $Q = [uvxy]$, com $[uy]$ a aresta interna, (ver figura 4.29(a)), ou $Q = [vxyw]$, com $[vw]$ a aresta interna, (ver figura 4.29(b)).

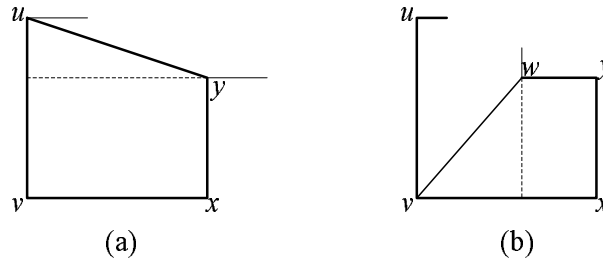


Figura 4.29: Se $[uvxy]$ tem grau 1 e $[uv]$ e $[vx]$ são vigiadas, um quadrilátero pode ser removido.

Na primeira instância y é reflexo, um corte horizontal através de y origina um rectângulo coberto e um polígono que admite uma quadrilaterização de $q - 1$ quadriláteros, satisfazendo o Lema 4.16. Aplicando este lema obtém-se o resultado. Na segunda instância w é reflexo, um corte vertical produz um rectângulo coberto e um polígono que admite uma quadrilaterização com $q - 1$ quadriláteros, satisfazendo a hipótese de indução (Lema 4.16). Em ambos os casos o resultado verifica-se.

caso 2. O grau de Q é 2. Os mesmos dois casos do Lema 4.16 aplicam-se:

caso 2.1. As diagonais não são adjacentes. As situações devem ser como as da figura 4.30(a).

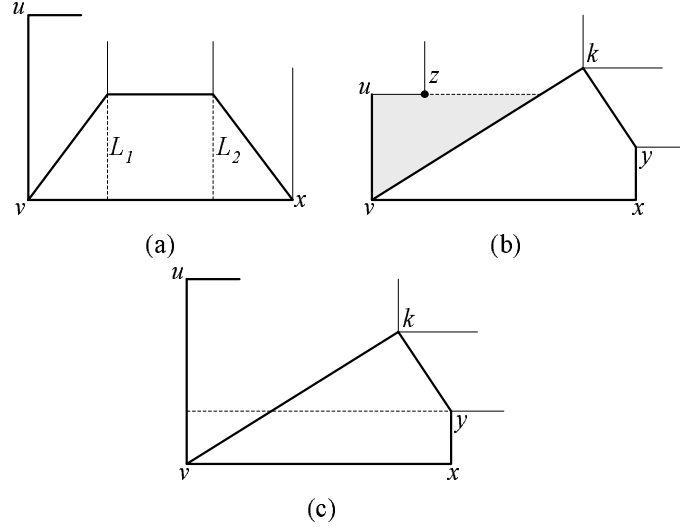


Figura 4.30: Se $[uvxy]$ tem grau 2 e $[uv]$ e $[vx]$ são vigiadas, ou aplica-se indução (a), a situação é impossível (b), ou um quadrilátero pode ser removido (c).

Os dois cortes L_1 e L_2 particionam P num rectângulo coberto, num polígono P_1 que admite uma quadrilaterização que satisfaz a hipótese de indução, e num polígono P_2 que admite uma quadrilaterização com q_2 quadriláteros que satisfaz o Lema 4.16, onde $q_1 + q_2 + 1 = q$. Aplicando os resultados tem-se que $\lfloor \frac{3(q_1-2)+5}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3(q_2-1)+5}{8} \rfloor$ guardas adicionais vigiam P . Uma análise tediosa revela que isto não é maior do que $\lfloor \frac{3(q-2)+5}{8} \rfloor$ para $q \geq 2$.

caso 2.2. As diagonais são adjacentes. O vértice u não pode ser um vértice de Q : as figuras 4.24(d), 4.24(e) e 4.24(f) não permitem três vértices convexos consecutivos. Tem-se que $Q = [vxyk]$, correspondente à figura 4.24(d), com y reflexo. Agora, se k tiver maior ordenada do que u , como na figura 4.30(b), então z está na sombra parcial de $[vk]$, o que é uma contradição. Assim, resta a situação da figura 4.30(c). Um corte através de y assegura o resultado como no Caso 1., (comparar com figura 4.29(a)). ■

Lema 4.18 *Seja P um polígono que admite uma quadrilaterização com q quadriláteros. Considere-se que P tem um guarda colocado ao longo dum segmento maximal L_1 , este que contém uma aresta do polígono tal que*

- (a) *existem dois cortes ortogonais a L_1 que particionam fora rectângulos adjacentes a L_1 , e*
- (b) *L_1 corta o restante (P com os dois rectângulos removidos) numa ou em duas (i.e., não em três) peças.*

Então, assumindo a HI, P poderá ser coberto com $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor - 1$ guardas adicionais.

Prova: Note-se que L_1 não é necessariamente um corte, mas pode ser uma aresta convexa. Seja P_1 e P_2 as duas peças separadas por L_1 depois de se remover os dois rectângulos; P_2 pode ser vazio. A premissa do lema é um pouco complexa mas é composta por duas consequências geométricas:

- (1) Se P_2 for não vazio, existe pelo menos um vértice reflexo em L_1 e em $P_1 \cup P_2$;
- (2) L_1 está numa aresta convexa de P_1 e de P_2 .

Primeiro suportam-se estas afirmações. Se L_1 for um corte, então particiona P em duas ou três peças. Se L_1 cortar P em três peças, a premissa poderá apenas ser satisfeita se a terceira peça for composta por um ou ambos os rectângulos removidos, contrariando a figura 4.31(a), por exemplo.

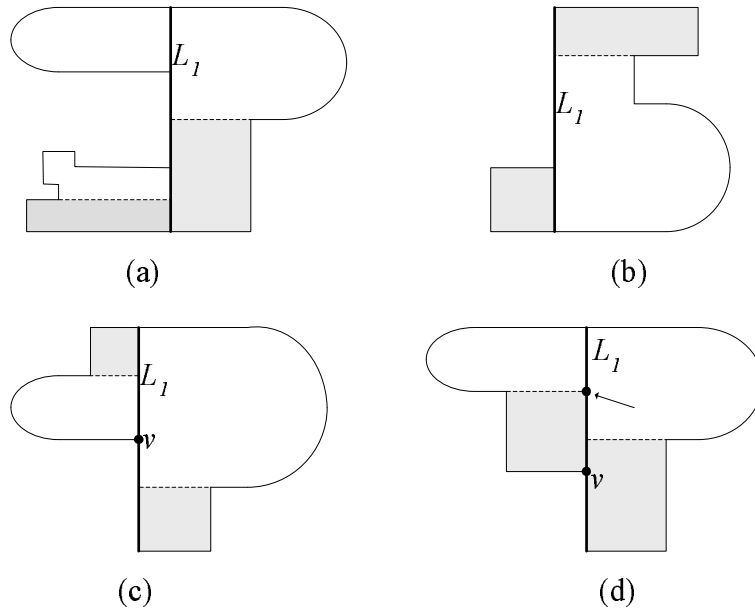


Figura 4.31: O corte em (a) não satisfaz as condições do lema; em (b) P_2 é vazio; em (c) e (d), L_1 contém um vértice reflexo.

Se L_1 cortar P em duas peças e se a segunda peça for composta por um ou por ambos os rectângulos removidos, então P_2 é vazio, como na figura 4.31(b), por exemplo. Seja v o vértice reflexo em L_1 (o que está em $P_1 \cup P_2$ no caso de haver dois vértices reflexos em L_1). Então ou v está em $P_1 \cup P_2$, como na figura 4.31(c), ou existe pelo menos outro vértice reflexo em L_1 , introduzido pelo corte ortogonal, como na figura 4.31(d). Finalmente, já que L_1 é uma linha de suporte para P_1 e para P_2 , isto constitui uma aresta convexa em cada um.

Considere-se que P_1 e P_2 admitem quadrilaterizações com q_1 e q_2 quadriláteros, respectivamente. Então, pelo Lema 2.8, $q_1 + q_2 = q - 2$. Aplicam-se os dois lemas anteriores para estabelecer a afirmação.

Pela propriedade (2), o Lema 4.16 aplica-se a P_1 e a P_2 , resultando a total cobertura com

$$\lfloor \frac{3(q_1-1)+5}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3(q_2-1)+5}{8} \rfloor = \lfloor \frac{3q_1+2}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3q_2+2}{8} \rfloor$$

guardas adicionais. Uma análise tediosa mostra que esta quantidade não é maior que $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor - 1$ para todos os possíveis (mod 8) resíduos de q_1 e de q_2 excepto no caso em que $q_1 \equiv 2(\text{mod } 8)$ e $q_2 \equiv 2(\text{mod } 8)$. Considere-se este último caso. Note-se que P_2 não pode ser vazio neste caso.

Introduza-se um corte L_2 ortogonal a L_1 através de um vértice reflexo v garantido pela propriedade (1) e coloque-se um guarda ao longo de L_2 . O corte L_2 deve particionar um dos P_1 ou P_2 , seja P_2 , em duas peças P'_2 e P''_2 , que admitem quadrilaterizações com q'_2 e q''_2 quadriláteros; isto pode ser ou não uma partição de P_1 , como ilustra a figura 4.32.

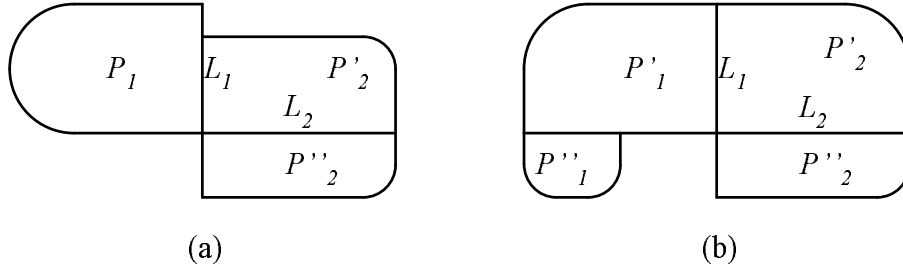


Figura 4.32: O corte L_2 pode (a) ou não (b) particionar P_1 .

Se L_2 particionar P_1 , considere-se que as peças P'_1 e P''_1 admitem as quadrilaterizações com q'_1 e q''_1 quadriláteros. Pelo Lema 2.8, $q'_1 + q''_1 = q_1$ e $q'_2 + q''_2 = q_2 + 1$, já que L_1 contém o ângulo reflexo v .

As condições do Lema 4.17 são verificadas para P_1 e para P_2 ; L_1 e L_2 estão numa aresta convexa. De seguida, P_2 pode ser coberto com:

$$g_2 = \lfloor \frac{3(q'_2-2)+5}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3(q''_2-2)+5}{8} \rfloor \quad (1)$$

guardas. Se L_2 não particionar P_1 , então aplica-se o Lema 4.17 a P'_1 para o vigiar com

$$g_1 = \lfloor \frac{3(q_1-2)+5}{8} \rfloor \quad (2)$$

guardas. Se L_2 particionar P_1 , então aplica-se o Lema 4.17 a P'_1 e o Lema 4.16 para P''_1 resultando em

$$g'_1 = \lfloor \frac{3(q'_1-2)+5}{8} \rfloor + \lfloor \frac{3(q''_1-1)+5}{8} \rfloor \quad (3)$$

guardas. Usando o caso em que $q_1 = 8k_1 + 2$ (a expressão (2) verifica a igualdade $g_1 = 3k_1$ e o caso analisado) e $q'_1 + q''_1 = q_1$ mostra que a expressão (3) implica $g'_1 \leq 3k_1$. Assim, $3k_1$ guardas são suficientes para P_1 em ambos os casos. O assumido, que $q_2 = 8k_2$ e $q'_2 + q''_2 = q_2 + 1$, leva à expressão (1) para $g_2 \leq 3k_2$. Então um total de $3(k_1 + k_2)$ guardas são suficientes. Finalmente, $q = q_1 + q_2 = 8(k_1 + k_2) + 6$ implica que $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor - 2 = 3(k_1 + k_2)$, que juntos com o guarda colocado em L_2 , validam o lema. ■

Finalmente reuniram-se as condições para provar o resultado obtido por Aggarwal [2]:

Teorema 4.6 *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor = \lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardas móveis para vigiar qualquer polígono ortogonal com n vértices, que admite uma quadrilaterização com q quadriláteros.*

Prova: A necessidade de $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardas móveis é estabelecida por polígonos com a forma de uma cruz suástica, ou a reunião de várias cruzes suásticas, como mostra a figura 4.33.

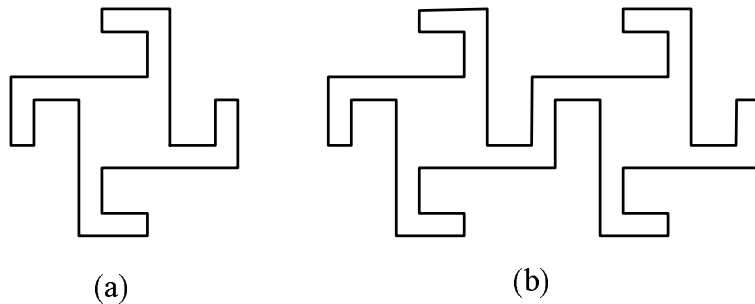


Figura 4.33: Polígonos que requerem $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardas móveis ortogonais: (a) $n = 20$ e $g = 4$; (b) $n = 36$ e $g = 7$.

A “simples cruz suástica”, figura 4.33(a), com $n = 20$ requer 4 guardas, um para cada braço; note-se que $\frac{3 \times 20 + 4}{16} = \frac{64}{16} = 4$. Juntando duas “cruzes suásticas” tem-se que $n = 36$, figura 4.33(b). Este polígono requer 7 guardas, um para cada braço e um para a junção; note-se que $\frac{3 \times 36 + 4}{16} = \frac{112}{16} = 7$. A junção de k “cruzes suásticas” resulta num polígono com $n = 16k + 4$ vértices que requer $3k + 1$ guardas; note-se que $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor = 3k + 1$. A necessidade para outros valores de n é estabelecida por juntar uma espiral, com um apropriado número de arestas, a um braço da “cruz suástica”. A figura 4.34 mostra a adição de uma espiral com 6 arestas e requer mais um guarda que a simples “cruz suástica”; a adição de uma espiral com 12 arestas requer mais dois guardas. Assim, está estabelecida a necessidade de $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ guardas.

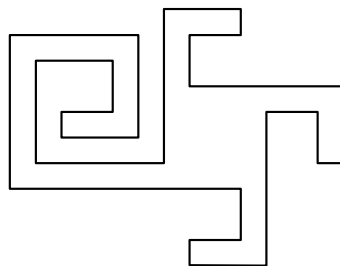


Figura 4.34: A adição duma espiral estabelece necessidade para outros valores de n .

Aplicando o Lema 2.5, para a suficiência do limite, então $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ é equivalente a $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor$. É desta forma que o limite aparecerá na prova.

A prova é feita por indução sobre q . Se $q \leq 2$, então um guarda é claramente suficiente. Assuma-se agora a HI. Fixe-se uma quadrilateralização arbitrária de P . O Lema 2.6 assegura a existência duma diagonal d que corta fora um número minimal k , de 2, 3 ou 4 quadriláteros. Isto constitui os três casos da prova, que se considerarão em ordem invertida.

caso $k=4$ Recorde-se da prova do Lema 2.6 (ver figura 2.14) que d deve ser uma diagonal de um quadrilátero Q de grau 4, seja $Q = [uvxy]$ com $d = [yu]$. O Lema

4.11 mostra que u, v, x e y têm que ser todos vértices reflexos. Seja x localizado abaixo e à esquerda de y , este que pode ser obtido, com sucesso e sem perda de generalidade, por uma rotação e reflexão. Pode-se distinguir três casos para as reais possibilidades, dependendo da localização horizontal de v, x e y . Utilizar-se-á a notação $x < y$ para afirmar que o ponto x está estritamente à esquerda de y .

subcaso 4.1 ($x < y$ (figura 4.35(a))) Este caso contraria o Lema 4.9. A figura referida demonstra-o, repare-se como se completa o polígono entre v e x .

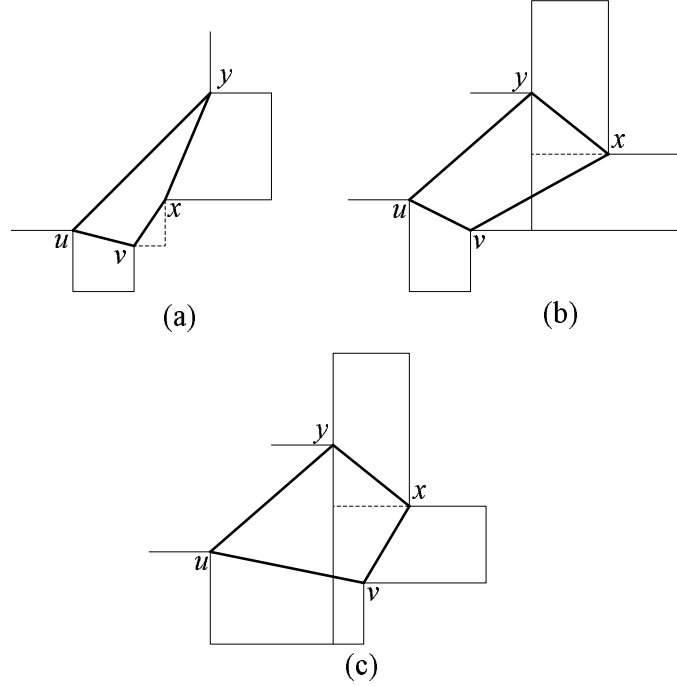


Figura 4.35: Se $[uvxy]$ tem grau 4, ou a situação é impossível (a), ou o Lema 4.18 aplica-se (b) e (c).

subcaso 4.2 ($x > y$ e $v < y$ (figura 4.35(b))) Coloque-se o guarda no corte vertical L_1 através de y , como está ilustrado. Então, este corte satisfaz as condições do Lema 4.18, com P_2 vazio. Aplicando este lema fica assegurado que P é vigiado por $\lfloor \frac{3q+5}{8} \rfloor - 1$ guardas, tais que, juntamente com o guarda colocado ao longo de L_1 validam o teorema.

subcaso 4.3 ($x > y$ e $v > y$ (figura 4.35(c))) De novo aplique-se o Lema 4.18 sendo L_1 o corte vertical através de y .

caso $k=3$ A prova do Lema 2.6 mostra que uma diagonal d pertence a um quadrilátero Q de grau 3. Seja $Q = [uvxy]$ com $d = [yu]$. Oriente-se d como na figura 4.36(a) e, sem perda de generalidade, assumamos que as arestas de P' adjacentes a d são horizontais, com u reflexo. A figura 4.23 mostra que no máximo um dos u, v, x, y é convexo, então um dos extremos de d é reflexo. Se o outro extremo for convexo, considera-se os ângulos de d como na figura 4.36(a); se o outro extremo também for reflexo, ou se consideramos os ângulos de d como na figura 4.36(a), ou estes são



(b)

Destinguem-se cinco casos, dependendo principalmente em saber qual aresta de Q é uma aresta do polígono. Em cada um dos casos o Lema 4.18 é invocado.

subcaso 3.2 ($[xy]$ é uma aresta do polígono) A aresta $[xy]$ deve ser vertical para satisfazer o Lema 4.9 e v deve estar à esquerda e abaixo de x já que Q é convexo. Observe-se as colocações verticais de u, v e x , um corte vertical através de v satisfaz o Lema 4.18. As figuras 4.37(a),(b) e (c) mostram cada uma das três ordens verticais (u, x, v) , (x, u, v) e (x, v, u) , respectivamente. O teorema segue-se colocando um guarda ao longo do corte e aplicando o Lema 4.18.

subsubcaso 3.3.1 (x está abaixo de v e à esquerda de y (figura 4.38(a)))
 Seja L_1 o segmento vertical maximal que contém y . Isto satisfaz o Lema 4.18, tendo em conta se y é ou não reflexo.

subsubcaso 3.3.3 (x está a cima de v e à esquerda de y) Este caso contraria o Lema 4.9 e portanto não é possível.

caso k=2 Divide-se o problema em dois casos, tendo em conta se as arestas adjacentes a d em P' , terão ou não a mesma paridade. Seja $d = [yu]$ como usualmente e considere-se que u tem menor ordenada do que y . Então u é sempre reflexo.

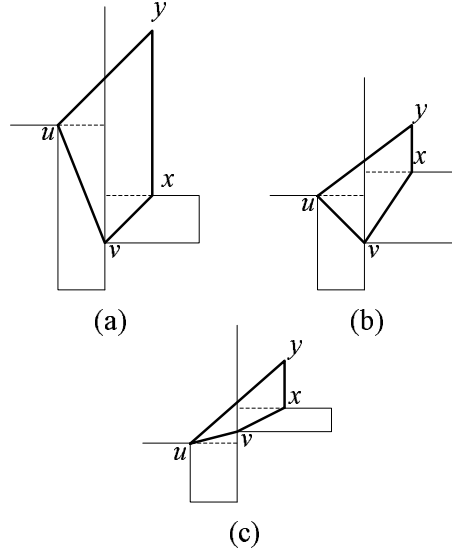


Figura 4.37: Se $[xy]$ é uma aresta do polígono aplica-se o Lema 4.18.

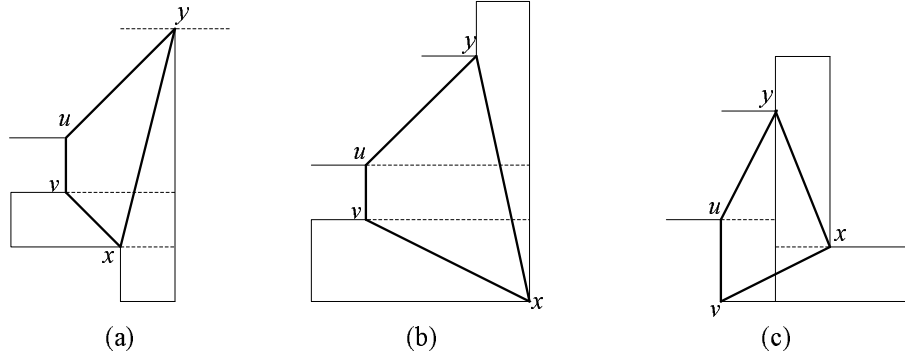


Figura 4.38: Se $[uv]$ é aresta do polígono aplica-se o Lema 4.18 em todos os casos.

subcaso 2.1 (arestas com a mesma paridade) Seja d orientada como na figura 4.39(a). Coloque-se um guarda ao longo da aresta vertical através de y se este for convexo (figuras 4.39(b) e (c)), ou ao longo da primeira aresta vertical atingida por um corte horizontal, através de u (figura 4.39(d)). Em todos os casos, o Lema 4.18 aplica-se, com P_2 vazio.

subcaso 2.2 (arestas com paridades opostas) Oriente-se d como na figura 4.40(a). Os vértices u e y são reflexos e as suas arestas adjacentes, orientadas como na figura referida, podem ser vistas examinando a figura 4.24. Exactamente um dos quatro vértices da cadeia orientada no sentido anti-horário entre u e y , é reflexo. Se o primeiro ou o segundo, contando a partir de u , for reflexo (figuras 4.40(b) e (c)), um corte vertical L_1 através de y satisfaz as condições do Lema 4.18. Se o terceiro ou o quarto vértice, a contar de u , for reflexo (figuras 4.40(d) e (e)), um corte vertical através de u satisfaz o Lema 4.18. Em todos os casos, colocando um guarda ao longo de L_1 e aplicando o Lema 4.18 assegura a cobertura de $\lfloor \frac{3g+5}{8} \rfloor - 1 + 1$ guardas, validando o teorema.

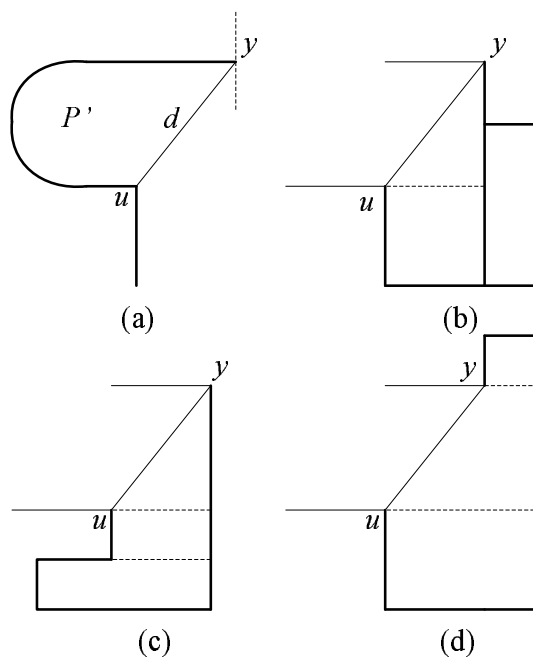


Figura 4.39: O Lema 4.18 aplica-se em todos os casos quando as arestas adjacentes a d têm a mesma paridade.

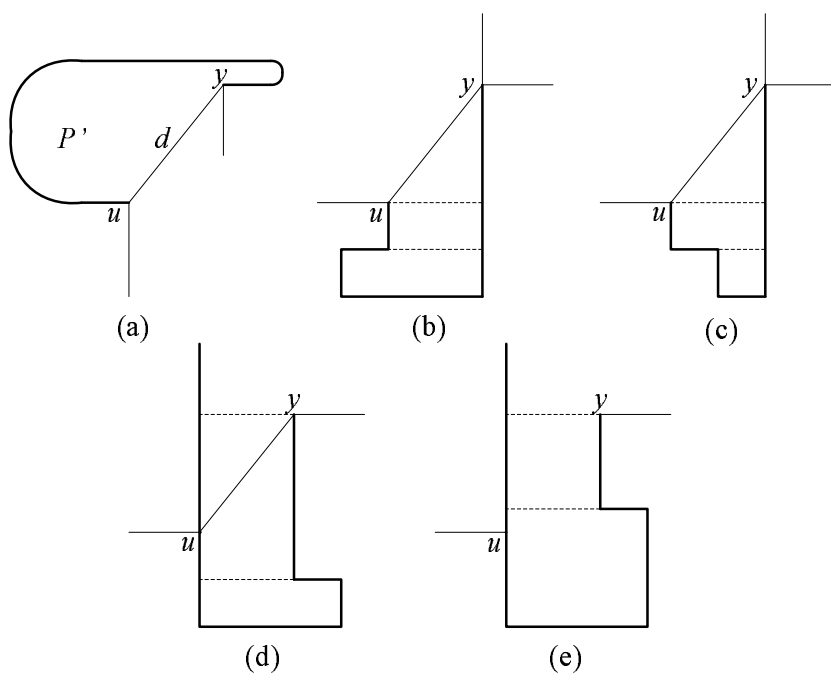


Figura 4.40: O Lema 4.18 aplica-se em todos os casos quando as arestas adjacentes a d têm paridades diferentes.

Foram consideradas todas as possibilidades e, assim, o teorema fica provado. ■

Este resultado foi generalizado para polígonos ortogonais com buracos por Györy, Hoffmann, Kriegel e Shermer [23].

Teorema 4.7 *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$ guardas móveis para vigiar qualquer polígono ortogonal com n vértices e h buracos.*

Para polígonos ortogonais em espiral, Bjorling-Sachas provou [5]:

Teorema 4.8 *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lfloor \frac{n-2}{6} \rfloor$ guardas em arestas para vigiar qualquer polígono ortogonal em espiral.*

4.6 Problemas da Fortaleza e Problema do Pátio duma Prisão

Os problemas da Fortaleza e do Pátio duma Prisão fazem parte da família do Problemas da Galeria de Arte. O polígono representa as paredes duma fortaleza ou dum pátio duma prisão, colocam-se os guardas em vários pontos do polígono com a finalidade de vigiar o exterior ou simultaneamente o interior e o exterior do polígono, respectivamente. Na versão do problema do Pátio de uma Prisão apenas guardas em vértices são permitidos e com o objectivo de vigiarem simultaneamente o exterior e o interior do polígono, como já foi referido.

Estas variantes do Teorema da Galeria de Arte foram estudadas pela primeira vez por D. Wood [37].

Problema 4.2 *(Problema da Fortaleza) Quantos guardas em vértices são necessários para se ver o exterior de um polígono?*

Problema 4.3 *(Problema do Pátio duma Prisão) Quantos guardas em vértices são suficientes para vigiar simultaneamente o interior e o exterior de um polígono simples com n vértices?*

4.6.1 Problema da Fortaleza

Para um polígono arbitrário, o Problema da Fortaleza foi resolvido por O'Rourke e Wood [36].

Teorema 4.9 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardas em vértices são necessários e suficientes para vigiar o exterior de qualquer polígono com n vértices.

Prova: Construa-se uma triangulação da porção do plano que está no interior do invólucro convexo mas é exterior ao polígono. Designe-se este grafo resultante, de n nós, por G'' , (ver figura 4.41(a)).

Adicione-se ao exterior do invólucro um nó v_∞ a G'' de modo a que este seja adjacente a qualquer nó do invólucro. Designe-se este grafo, de $n+1$ nós, por G' , (figura 4.41(b)). Finalmente, escolha-se um vértice x do invólucro e divida-se este vértice em dois, x' e x'' . Equipartilhe-se as ligações de x por x' e x'' de modo a que o grafo continue planar e adicione-se um novo arco tal que v_∞ fique adjacente a x' e a x'' . Designe-se este grafo, de $n+2$ nós, por G (figura 4.41(c)).

O grafo G é um grafo triangular de um polígono. Isto pode ser visto “abrindo” o invólucro convexo em $[x'x'']$ e movendo v_∞ o mais possível de modo que todas estas

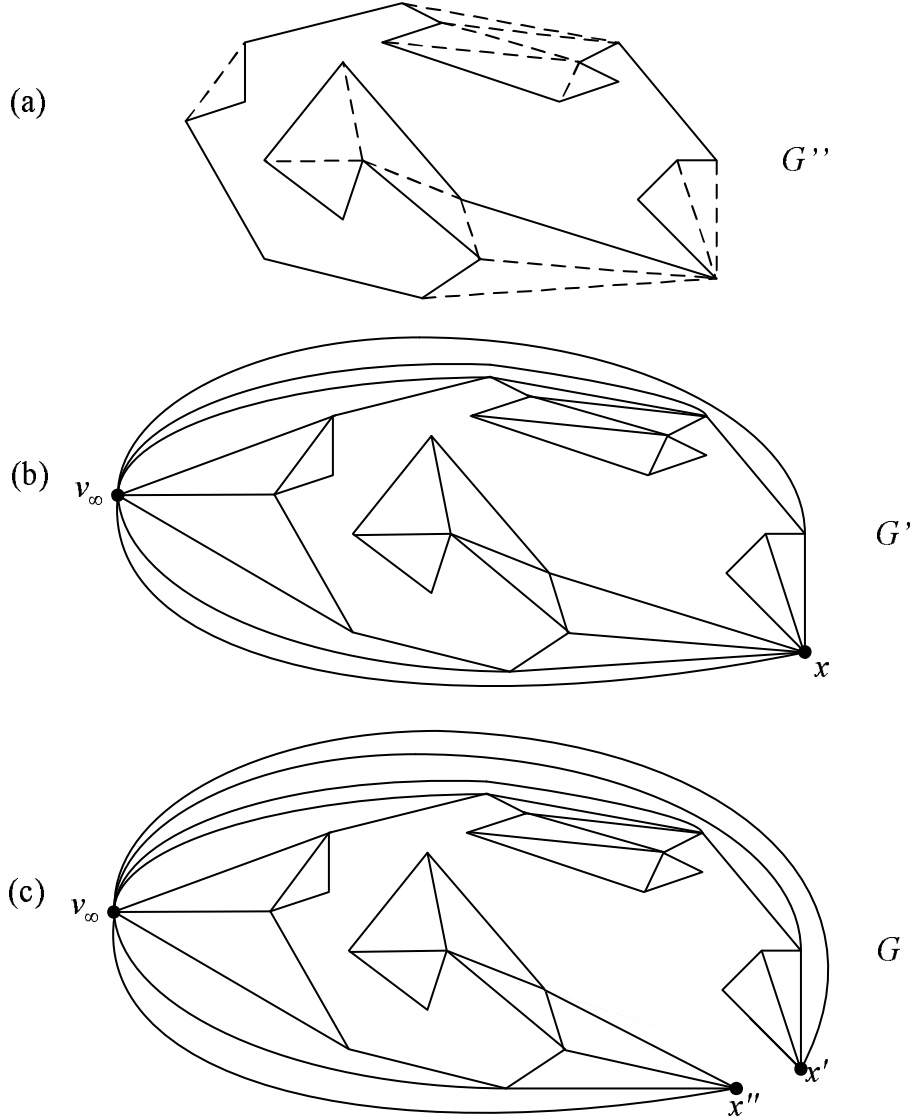


Figura 4.41: O grafo G em (c) é produzido a partir da triangulação dos bolsos do invólucro (a) ligando todos os vértices do invólucro a v_∞ (b) e divide um vértice x pertencente ao invólucro.

ligações sejam segmentos de recta. Como G é um grafo triangular então é 3-colorível. A cor usada com menor frequência, diga-se vermelho, ocorre não mais do que $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ vezes. Suponha-se que v_∞ não é colorido com vermelho, então colocando guardas nos nós vermelhos o exterior do polígono original, fica vigiado com $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardas em vértices.

Caso contrário, se v_∞ for colorido de vermelho, esta estratégia não resultará, porque nenhum guarda pode ser colocado em v_∞ , já que este não é um vértice do polígono. Neste caso, coloque-se os guardas nos vértices coloridos com a segunda cor menos frequente. Suponha-se que o número de ocorrências das três cores são $a \leq b \leq c$, com $a + b + c = n + 2$. Como $a \geq 1$ e $b + c \leq n + 1$ então $b \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Finalmente, em cada caso, cada triângulo incidente a v_∞ é dominado e como v_∞ não é vigiado, qualquer outro vértice do invólucro tem que ser vigiado. Claramente, que estes

guardas cobrem o exterior do invólucro. O exterior do polígono que está no interior do invólucro, fica vigiado pelo argumento da 3-coloração. ■

Para polígonos ortogonais, em 1983, Aggarwal [2] provou:

Teorema 4.10 $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardas em vértices são necessários e suficientes para vigiar o exterior de qualquer polígono ortogonal P com n vértices.

Prova: A necessidade obtém-se da espiral de $n = 4m$ vértices ilustrada na figura 4.42.

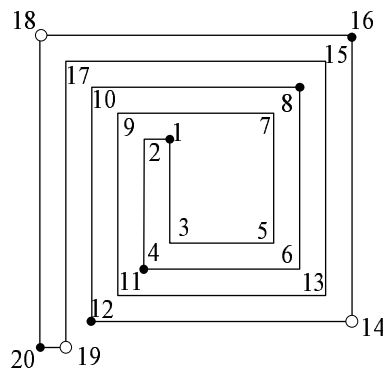


Figura 4.42: Uma espiral ortogonal requer $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardas em vértices para cobrir o seu exterior.

Iniciando pelo interior da espiral, é evidente que as marcas 1, 4, 8, 12, 16, ..., $4(m - 3)$ são uma escolha ótima para a localização dos guardas: uma segunda escolha, também ótima, é 3, 7, 11, 15, ..., $4m - 1$. Para o braço exterior a colocação dos guardas depende da localização anteriormente escolhida. A primeira sequência pode continuar de duas formas distintas: ou ..., $4(m - 2)$, $4(m - 1)$, $4m$ (os círculos a cheio na figura 4.42), ou ..., $4(m - 2)$, $4(m - 2) + 2$, $4(m - 1) + 2$, $4m - 1$ (os círculos a branco na figura 4.42). Em ambos os casos são utilizados $m + 1$ guardas. Se adicionarmos à espiral mais dois vértices, $n = 4m + 2$, então $m + 2$ guardas são requisitados. Em todos os casos, $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardas são requisitados.

A suficiência da prova resulta, quase directamente, da partição em polígonos da forma *L-shape*, discutida no Capítulo 2. Dado um polígono ortogonal P com n vértices, remova-se a aresta horizontal e , que tem maior ordenada, prolongue-se as duas arestas verticais para cima e construa-se o rectângulo que contém totalmente o polígono, (ver figura 4.43).

O interior deste novo polígono P' que admite $n + 4$ vértices, coincide com a parte que cerca imediatamente o exterior de P excepto para o rectângulo Q , assombreado na figura, que pertence a ambos.

É importante observar que o procedimento de localizar os guardas, no algoritmo 4.1, apenas localiza os guardas em vértices reflexos. Como os seis novos vértices de P' são todos convexos, os guardas estarão todos localizados em vértices de P , para que o interior de P' fique vigiado. Vigiar a parte que cerca imediatamente o exterior de P com guardas em vértices, implica a cobertura de todo o exterior de P : cada lado do rectângulo mais pequeno que cerca P , tem que ter um guarda e estes guardas cobrem

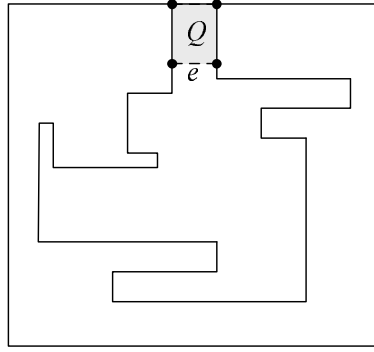


Figura 4.43: O exterior dum polígono ortogonal pode ser convertido no interior de outro polígono removendo a aresta e .

o plano infinito exterior ao rectângulo. Pela observação que antecede o algoritmo 4.1, o interior de P' pode ser coberto com $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor$ guardas. A região Q necessitará de um guarda, validando um total de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$ guardas. Quando $n \equiv 2(\text{mod}4)$, esta fórmula é idêntica a $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$. Note-se que a colocação de guardas deve permitir a cobertura de todo o plano infinito, o rectângulo limite pode ser considerado grande o suficiente. Se $n \equiv 0(\text{mod}4)$, tem-se a liberdade de aumentar P' com dois vértices, sem aumentar o número de guardas, deve-se à presença da função *floor* na observação que antecede o algoritmo 4.1. Assim, modifique-se P' de modo a que tenha $n + 6$ vértices como está ilustrado na figura 4.44.

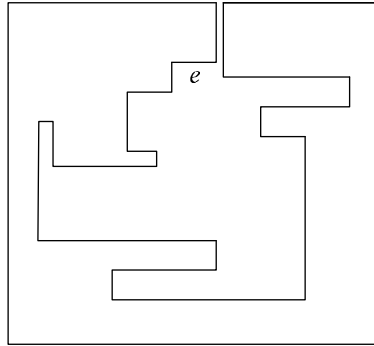


Figura 4.44: Uma estratégia alternativa para circunscrever o polígono, usada quando n é divisível por 4.

Note-se que o interior de P' e o exterior imediato a P coincidem: Q foi removido. P' pode ser coberto com $\lfloor \frac{n+6}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$. Como $n \equiv 0(\text{mod}4)$, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$. ■

Anteriormente, os guardas localizavam-se unicamente no polígono. Em 1984, Aggarwal e O'Rourke [37] resolveram o problema para o caso em que a condição anterior não se verifica, i.e, os guardas podem pertencer a qualquer ponto do plano.

Teorema 4.11 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardas em pontos são sempre suficientes e por vezes necessários para vigiar o exterior dum polígono P com n vértices.

Para provar este teorema é necessário introduzir o seguinte lema.

Lema 4.19 $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ guardas em pontos são suficientes para vigiar o exterior dum polígono P com n vértices.

Prova: Rode-se P de modo a que os vértices a e b sejam o de maior e o de menor ordenada, respectivamente. Adicione-se dois vértices λ e ρ , com menor ordenada que b , afastados o suficiente de forma a ambos serem visíveis de a , (ver figura 4.45).

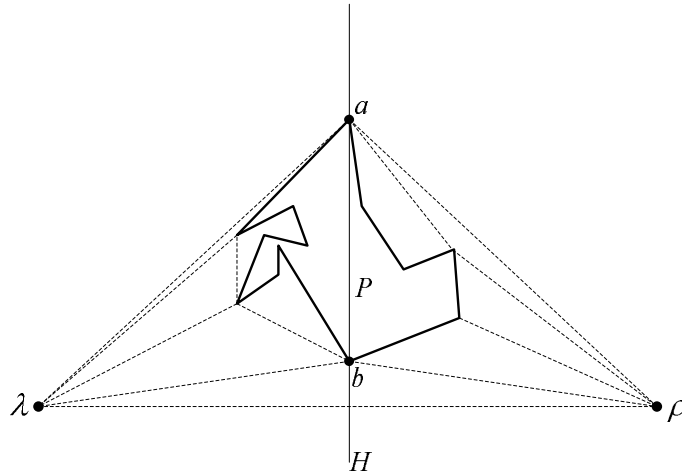


Figura 4.45: Dominar este grafo implica cobrir o polígono.

Construa-se uma triangulação do interior do invólucro convexo e exterior ao polígono. Adicione-se diagonais de λ e ρ a qualquer vértice do invólucro que são visíveis por λ e ρ . Divida-se o vértice a em dois obtendo um polígono triangulado com $n + 3$ vértices. Cubra-se este polígono com $\lfloor \frac{n+3}{3} \rfloor = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ guardas pelo Teorema 3.1. Agora argumenta-se que estas guardas vigiam o exterior.

Claramente que a porção interior ao invólucro é coberta. Agora, considere-se o semi-plano esquerdo H determinado por uma linha que passa por a e b . Se um guarda for destacado para λ , então o exterior ao invólucro de P em H fica vigiado. Se λ não tiver guarda, como qualquer aresta do invólucro na cadeia esquerda entre a e b forma um triângulo com λ , então pelo menos um extremo de cada aresta do invólucro tem que ter um guarda. Mas assim, esses guardas cobrem o exterior em H . Aplicando o mesmo argumento ao semi-plano direito estabelece-se o lema. ■

Já se está nas condições de provar o teorema pretendido. Não se deve deixar de referir que a prova apresentada deve-se a Shermer, visto ser mais simples que a original.

Prova do Teorema 4.11 A necessidade de $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardas é estabelecida por um polígono que se obtém “virando de dentro para fora” o polígono pente, (ver figura 3.10). A figura 4.46 ilustra um exemplo dum polígono com 13 vértices que requer $5 = \lceil \frac{13}{3} \rceil$ guardas. A construção genérica, com k dentes, tem $n = 3k + 4$ vértices e requer $k + 2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardas. A necessidade para os outros dois valores possíveis de $(n \bmod 3)$ são obtidos pela adição de um ou dois vértices a este exemplo.

Se P for convexo, dois guardas colocados suficientemente longe e em lados opostos de P são suficientes para vigiar o exterior. Já que $n > 3$, $2 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

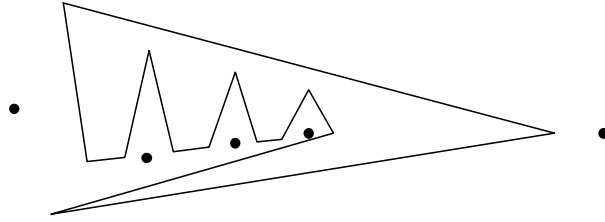


Figura 4.46: São necessários $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardas em pontos para cobrir o polígono.

Suponha-se então que P tem pelo menos um bolso, i.e, um polígono exterior a P e interior ao invólucro e limitado por uma aresta do invólucro. Rode-se P até que a e b sejam os únicos vértices com maior e menor ordenada, respectivamente. Adicione-se dois novos vértices λ e ρ em lados opostos de P , suficientemente distantes, de modo a que os dois vejam a e b . Construa-se uma triangulação dos bolsos do invólucro e ligue-se λ e ρ a todos os vértices do invólucro que lhe são visíveis, como ilustra a figura 4.47.

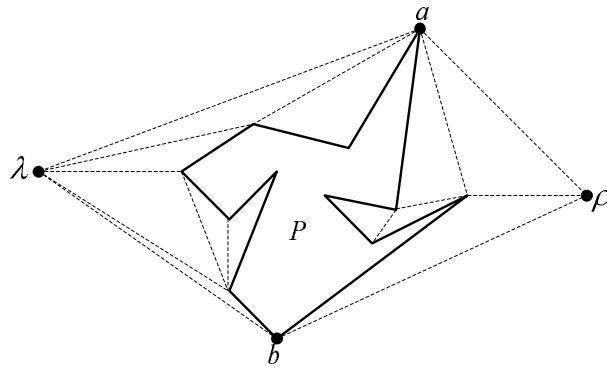


Figura 4.47: Se o número de vértices no invólucro é par, este grafo é 3-colorível.

Se for possível provar que o grafo triangular G é 3-colorível e como $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$, então colocando guardas na cor menos frequente, estabelece-se o teorema utilizando o mesmo argumento que no Lema 4.19 para a cobertura do exterior. Mas G não é sempre 3-colorível: o grafo da figura 4.48 requer quatro cores.

A ideia de Shermer foi a de modificar o grafo de modo a que este seja sempre 3-colorível. Seja h o número de vértices do invólucro. Dois casos serão considerados: h é par ou h é ímpar.

Caso 1. (h é par) Neste caso o grafo G é sempre 3-colorível, repare-se na escolha de λ e ρ . Colore-se os vértices do invólucro alternadamente com as cores 1 e 2. Então λ e ρ podem ser coloridos com a cor 3. Cada bolso é fechado, (ver figura 4.47), por uma aresta do polígono que forma o bolso (estas arestas designar-se-ão por tampas). Sabendo que estas arestas são coloridas por (1,2), um polígono bolso deve ser 3-colorível. O resultado é uma 3-coloração de G , implicando que se poderá dominar com $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ guardas. Pelo argumento da prova do Lema 4.19, estes guardas vigiam o exterior.

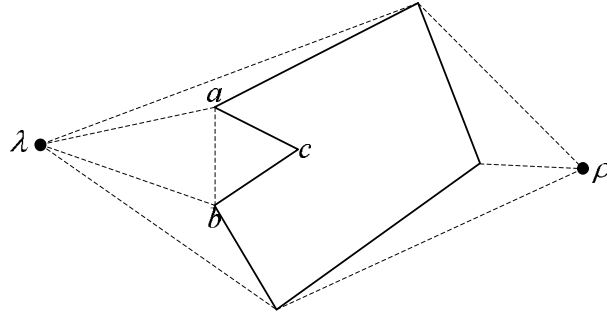


Figura 4.48: Um grafo que requer 3 guardas combinatoriais para que seja dominado, mas apenas 2 guardas são precisos para a cobertura do exterior.

Caso 2. (h é ímpar) A aproximação anterior não resultará porque o invólucro não pode ser 2-colorível. Seja $[yz]$ a tampa de um bolso e x o vértice do triângulo de base $[yx]$ que pertencente ao bolso. Agora oriente-se P e escolha-se ρ tal que

- (1) ρ possa ver x ;
- (2) $[x\rho]$ não é paralela a qualquer aresta do polígono, e
- (3) ρ é distante o suficiente para ver o par de vértices antípodas a e b (definidos anteriormente como sendo os únicos vértices de menor e maior ordenada após rotação de P), que admitem linhas de suporte paralelas.

A condição (2) é imposta de forma a que a e b sejam os únicos vértices de menor e maior ordenada, como anteriormente. É evidente que é sempre possível escolher o tal ρ . Coloque-se λ no lado oposto de P como no caso anterior, (ver figura 4.49).

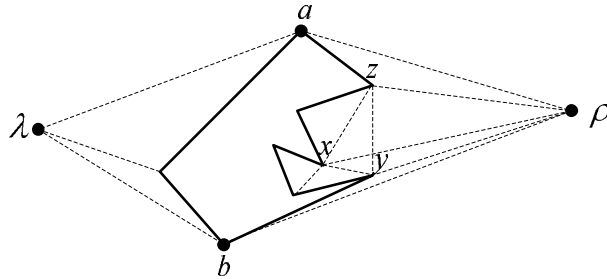


Figura 4.49: Se o número de vértices do invólucro é ímpar, um vértice x do invólucro está ligado a ρ de modo a que o grafo seja 3-colorível.

Por construção, o quadrilátero $[pyxz]$ é convexo. Remova-se a diagonal $[yz]$ de G e adicione-se a diagonal $[px]$. Se x pertencer ao invólucro, aumenta-se o número de vértices do invólucro de modo a que fique par. Agora proceda-se como no caso anterior. Colore-se o ciclo formado pelos vértices do invólucro e por x , com as cores 1 e 2 alternadamente. Colore-se λ e ρ com a cor 3 e construa-se uma 3-coloração de todos os polígonos bolsos. Domine-se G com $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ guardas. O argumento para a cobertura do exterior usado na prova do Lema 4.19 tem que

sofrer uma pequena modificação, já que pode acontecer que nenhum extremo da aresta $[yz]$ do invólucro seja destacado para a colocação do guarda. Para este caso basta colocar um guarda em x e ilumina-se todo o exterior. ■

Em 1994, Yiu e Choi [57] estudaram o problema da Fortaleza utilizando guardas em arestas.

Teorema 4.12 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ (resp. $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$) guardas em arestas são suficientes e ocasionalmente necessários para vigiar o exterior de um polígono P simples (resp. ortogonal) com n vértices.

Ideia da Prova: Para um polígono simples a prova apresentada foi: Se P for convexo, é fácil ver que $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardas em arestas são suficientes. Considere-se que P não é convexo e que todos os seus bolsos têm pelo menos quatro arestas. Enumere-se os vértices de P da seguinte forma: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{3k}, \dots, v_n$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então, colocando um guarda em cada vértice com índice múltiplo de 3, v_{3k} , é suficiente. O resultado anterior é assegurado pelo resultado de O'Rourke [37]: qualquer triangulação de um polígono simples admite uma diagonal que corta 4, 5 ou 6 arestas. Então por análise similar à usada na prova do Teorema 4.4 o resultado segue-se.

O resultado para um polígono ortogonal de Yiu e Choi: primeiro cerca-se o polígono com um quadrado, depois decompõem-se a região entre este quadrado e P , num conjunto de $\frac{n}{2} + 2$ retângulos, estendendo as arestas de P paralelas ao eixo dos xx até atingirem outra aresta de P ou o quadrado. Yiu e Choi depois procederam de uma forma similar usada por Edelsbrunner, O'Rourke e Welzl [13] na prova alternativa do Teorema 4.2. ■

Em 1995, Yiu [56] também estudou o caso em que guardas em vértices consecutivos são usados. Definiu um k -consecutivo guarda em vértice, como sendo o conjunto de k guardas em vértices colocados em k vértices consecutivos na fronteira do polígono. Mostrou que $\lceil \frac{n}{k+1} \rceil$ k -consecutivos guardas em vértices, são por vezes necessários e sempre suficientes para vigiar o exterior de qualquer polígono, $k < n$.

4.6.2 Problema do Pátio duma Prisão

Para o problema do Pátio da Prisão, o primeiro resultado importante deve-se a O'Rourke [36]. Em 1983, provou que $\min\{\lceil \frac{n}{2} \rceil + r, \lfloor \frac{n+\lceil \frac{h}{2} \rceil}{2} \rfloor, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor\}$ guardas são sempre suficientes para vigiar simultaneamente o interior e o exterior de qualquer polígono P com n vértices dos quais r são reflexos e h estão no invólucro convexo de P . O Problema do pátio da prisão foi independentemente proposto por D. Wood e J. Malkevitch [37]. O valor $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ foi conjecturado por O'Rourke [37] e deu origem a um limite superior $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Este limite superior foi aperfeiçoado e substituído por $\lceil \frac{7n}{12} \rceil$ por Kooshesh, Moret e Székely [28]. Uma excelente análise é dada por Shermer, [45]; mais resultados parciais podem ser encontrados no artigo de M. Watanabe [55].

Não se pode deixar de referir o livro de O'Rourke [37], da qual se pode citar a seguinte observação: “*Proving or disproving this conjecture is one of the most interesting open problems in this fields.*”.

No mesmo ano, O'Rourke [54] também considerou o caso para polígonos ortogonais e provou o limite superior $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$.

Teorema 4.13 *São sempre suficientes $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$ guardas em vértices para vigiar o interior e o exterior dum polígono ortogonal.*

Prova: Cubra-se o exterior com $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardas de acordo com o Teorema 4.10. Construa-se uma partição do interior em quadriláteros convexos. Descarte-se cada aresta que tem um guarda num dos seus extremos. Tal pode tornar o grafo desconexo, mas o número total de vértices não é mais do que $n - (\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1)$, (ver figura 4.50).

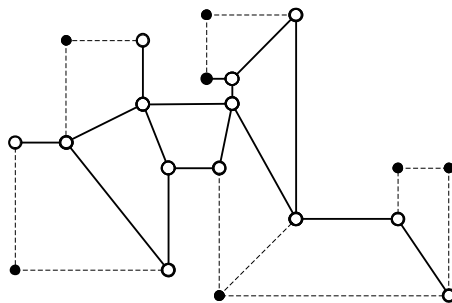


Figura 4.50: As arestas a tracejado incidem nos vértices (a cheio) onde se colocam guardas.

Depois remova-se todos os vértices e arestas que não são parte de nenhum quadrilátero; repare-se que os guardas vigiam todos os lados de tais arestas e à volta de todos esses vértices. Faça-se uma 4-coloração (como foi feita na prova do Teorema 4.2) e coloque-se guardas nos vértices coloridos com a cor usada com menos frequência. Cada peça com n_i nós necessitará não mais do que $\lfloor \frac{n_i}{4} \rfloor$ guardas; repare-se que $n_i \geq 4$. O número total de guardas utilizados é $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1 + \lfloor \frac{n - \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1}{4} \rfloor$. Esta expressão não é maior do que $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$; a constante 5 pode ser reduzida para alguns valores de $(n \bmod 16)$. ■

O resultado exacto foi determinado por Füredi e Kleitman [18], em 1992. A prova é bastante pormenorizada e apenas será dada uma pequena ideia da sua demonstração.

Teorema 4.14 *São sempre suficientes e ocasionalmente necessários $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ (resp. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) guardas em vértices para vigiar simultaneamente o interior e o exterior de um polígono convexo (resp. não convexo) com n vértices.*

Ideia da Prova: É fácil observar que um polígono convexo com n vértices requer no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardas em vértices. Para o caso não-convexo, a prova é baseada no seguinte lema de coloração, também muito pormenorizado: Seja \mathcal{R} uma figura triangulada planar com n vértices, cada uma das arestas externas é rotulada com no máximo duas marcas escolhidas do conjunto $\{\alpha, \beta\}$. As arestas que são externas em ambos os lados podem ter as duas marcas, enquanto que as outras arestas externas podem ter no máximo uma marca. Seja q um vértice da fronteira de \mathcal{R} . Então, existem conjuntos A e B de vértices de \mathcal{R} tal que

1. cada triângulo de \mathcal{R} intersecta A e intersecta B , q está em B ;

2. qualquer aresta externa de \mathcal{R} intersecta o conjunto correspondente à(s) sua(s) marca(s);
3. a soma das cardinalidades de A e B são no máximo n . ■

4.7 Iluminação Utilizando Reflectores

Até agora assumiu-se que os guardas têm um campo de visão de 2π radianos, ou seja, podem ver em todas as direcções. Considere-se agora que o guarda tem um campo de visão limitado, ou tendo em conta a definição 4.5, ilumina-se o polígono com reflectores. Repare-se que afirmar que um polígono é vigiado por guardas é o mesmo que dizer que esse polígono é iluminado com lâmpadas. Um reflector f_i é uma espécie de lâmpada localizada num ponto p do plano, designado por ápice; f_i ilumina apenas segundo um ângulo positivo α_i de iluminação e pode ser rodado em torno do seu ápice. Em 1992, J.Urrutia [54] propôs um dos problemas mais interessantes nesta área, o Problema da iluminação dos 3-reflectores:

Problema 4.4 *Sejam $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ e P um polígono convexo arbitrário. Utilizando três reflectores, não mais do que um por ápice, e sabendo que cada um tem um ângulo máximo de iluminação de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, como se poderá colocá-los de modo a iluminar P completamente?*

Prove-se que o Problema dos três reflectores tem sempre uma solução positiva. Para um polígono P com 3 vértices o problema é trivial. Considere-se qualquer polígono convexo com pelo menos quatro vértices e suponha-se que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Considere-se primeiro que $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, como P tem pelo menos quatro vértices, então a amplitude do ângulo interno de um vértice v de P é pelo menos $\frac{\pi}{2}$. Encontre-se um triângulo T com ângulos internos α_1, α_2 e α_3 tal que o vértice de T com ângulo α_2 está em v e os outros vértices de T estão em dois pontos x e y na fronteira de P .

caso 1 Suponha-se que x e y estão em arestas diferentes e_1 e e_3 de P , (ver figura 4.51).

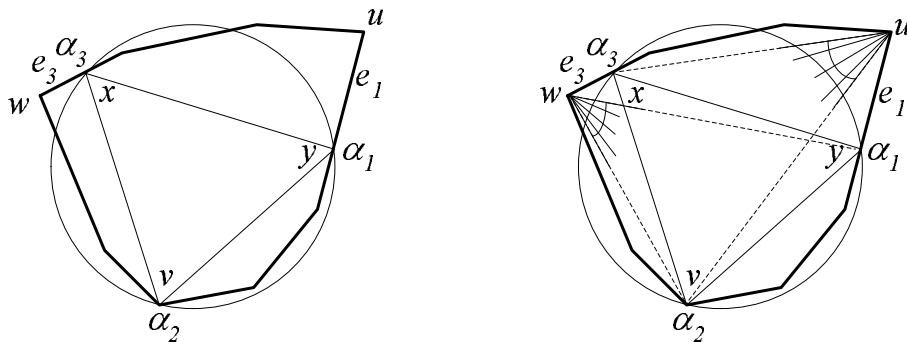


Figura 4.51: Ilustração da prova do Problema dos Três reflectores.

Coloque-se um reflector f_2 com um ângulo de iluminação α_2 , em v de forma a iluminar T . Considere-se o círculo C que passa pelos vértices de T . É fácil ver

que pelo menos um vértice de e_1 e e_3 não está contido no interior de C . Sejam u e w esses pontos. Tem-se assim dois casos:

caso 1.1 $u \neq w$. Coloque-se os reflectores f_1 e f_3 em u e w de forma a iluminar as regiões angulares determinadas por v, u, x e por v, w, y . Como u e w não estão contidos no interior de C , os ângulos de iluminação de f_2 e f_3 são no máximo α_1 e α_3 , respectivamente. Como f_1, f_2 e f_3 iluminam P , o resultado segue-se.

caso 1.2 $u = w$. Considerando as tangentes a C em x e y é fácil verificar que o ângulo α de P em u é no máximo $\pi - 2\alpha_2$ que é menor ou igual a $\alpha_3 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Coloque-se um reflector de amplitude α em u . Isto ilumina P .

caso 2 Suponha-se que x e y estão na mesma aresta e de P , (ver figura 4.52).

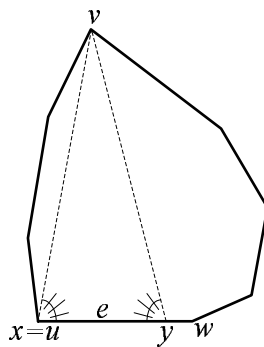


Figura 4.52: Os pontos x e y pertencem à mesma aresta.

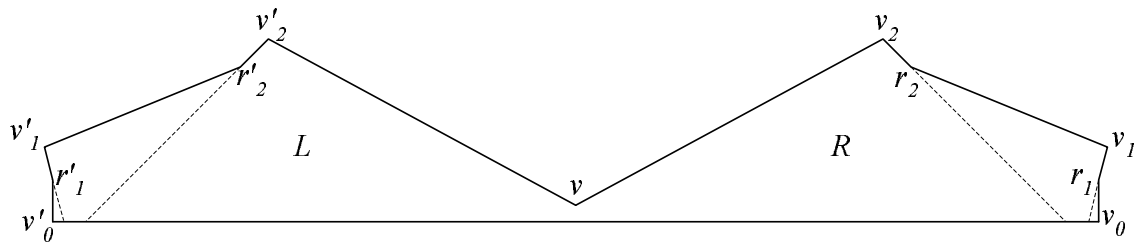
Após rotação e reflexão de P , considere-se que v é o vértice de maior ordenada e tanto x como y pertencem à aresta de menor ordenada. Caso haja mais do que um vértice com ordenada máxima, considere-se que v é, entre estes, o que tem menor abcissa. Sejam u e w os extremos de e . Assim, u e w podem não coincidir com x e y . Considere-se o caso em que $x = u$ e $y \neq w$ (os restantes casos são simétricos ou obtêm-se conjugando este). Coloque-se um reflector f_1 em x , com amplitude α_1 , de forma a iluminar a região angular definida por v, x e y . Coloque-se um reflector f_3 em y , com amplitude α_3 , de forma a iluminar a região angular definida por x, y e v . Coloque-se um reflector f_2 em v . O ângulo de iluminação de f_2 é no máximo α_2 . Como f_1, f_2 e f_3 iluminam P , o resultado segue-se.

Pretende-se iluminar um polígono com reflectores.

Considere-se um polígono P com n vértices. Observe-se que se for permitido colocar $n - 2$ reflectores de tamanho $\frac{\pi}{3}$ nos vértices de P , podemos fazê-lo de forma a que P fique completamente iluminado. Isto deve-se ao facto de que qualquer triangulação de P tem $n - 2$ triângulos cada um com pelo menos um ângulo interno de amplitude máxima $\frac{\pi}{3}$. No entanto, observe-se que usando este procedimento para iluminar P , provavelmente, serão necessários mais do que um reflector em alguns vértices de P . Se

Será possível iluminar qualquer polígono colocando em cada vértice de P apenas um reflector de amplitude máxima α , para algum $\alpha < \pi$? Surpreendentemente para polígonos arbitrários a resposta a esta questão é não. Urrutia [54] encontrou um polígono (ver figura 4.53)), que dá uma resposta negativa a esta questão.

Prova: Prova-se o resultado apenas para reflectores ortogonais, a prova completa pode ser encontrada em [15]. A prova apresentada deve-se a O’Rourke e Xu [38]. Considere-se o polígono P simétrico, ilustrado na figura 4.53.



Divida-se P numa secção esquerda L e numa secção direita R por um corte vertical através do vértice v . Todos os ângulos internos e convexos de P são maiores do que $\frac{\pi}{2}$. Enumere-se os vértices de P , como na figura 4.53, e observe-se que as extensões l_2 e l_1 das arestas de P que ligam v_2 a r_2 e v_1 a r_1 , respectivamente, são tais que l_2 atinge a base de P à esquerda do ponto que l_1 atinge.

Assim, surge naturalmente o seguinte problema: *Quantos π -reflectores (reflectores de amplitude π), colocando no máximo um por vértice, são sempre suficientes para ilumi-*

nar qualquer polígono com n vértices?

Este problema continua em aberto. F. Santos [37] construiu uma família de polígonos com $5n + 1$ vértices que requerem $3n$ reflectores de amplitude π para os iluminar, (ver figura 4.54).

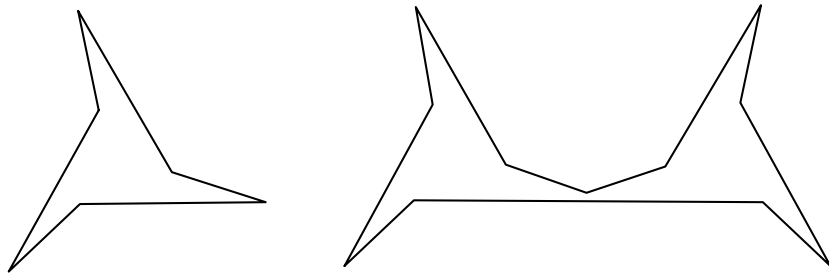


Figura 4.54: Uma família de polígonos com $5n + 1$ vértices que requerem $3n$ reflectores de amplitude π .

Urrutia [54] explorou o problema para polígonos ortogonais com reflectores ortogonais colocados em vértices. Para tal, considerou uma regra de iluminação que nomeou de *topo-esquerda*:

1. No vértice de topo de cada aresta esquerda de P coloque-se um reflector ortogonal iluminando o conjunto de direcções entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π ;
2. No vértice esquerdo de cada aresta de topo de P coloque-se ainda um reflector ortogonal iluminando o conjunto de direcções entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π .

Duma forma similar, pode-se definir as regras de iluminação topo-direita, base-direita e base-esquerda, cada uma das quais ilumina P .

Teorema 4.16 *Qualquer polígono ortogonal P com n vértices pode ser iluminado com pelo menos $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonais em vértices.*

Prova: Começa-se por provar que P pode ser iluminado colocando um conjunto de reflectores ortogonais de acordo com a regra de iluminação topo-esquerda.

Para se verificar que o conjunto de reflectores escolhidos pela regra de iluminação topo-esquerda ilumina P , escolha-se qualquer ponto q em P . Considere-se o maior segmento de recta horizontal h que passa por q e está totalmente contido em P . Deslize-se h para cima até atingir a aresta de topo de P ou este tocar no vértice de topo da aresta de P que contém o extremo esquerdo de h . No caso anterior, existe um reflector neste vértice que ilumina q . Suponha-se então que h atinge uma aresta de topo e de P . Note-se que pela regra de iluminação definida, coloca-se um reflector no vértice esquerdo de e , e este reflector ilumina q , (ver figura 4.55).

Mais ainda, se forem usadas as quatro regras de iluminação em simultâneo, colocam-se exactamente dois reflectores em cada vértice reflexo e um em cada vértice convexo. Assim, se P tiver r vértices reflexos, o número m total de reflectores usados pelas quatro regras será $2r + (n - r)$. Pelo Lema 2.4, $r = \frac{n-4}{2}$ e, assim, tem-se que

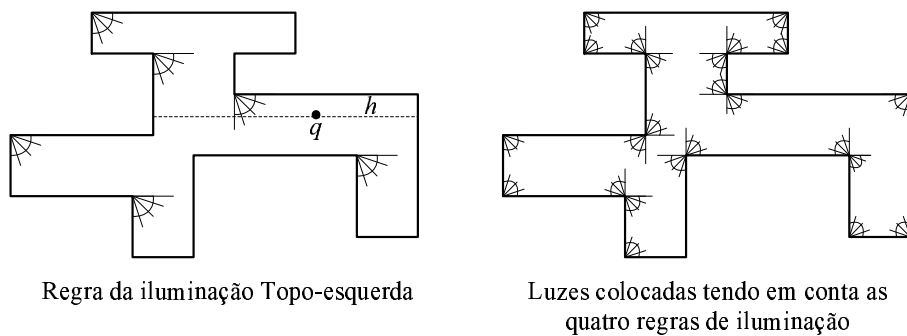


Figura 4.55: Iluminar um polígono ortogonal com reflectores ortogonais.

$m = 2\frac{n-4}{2} + \frac{n+4}{2} = \frac{3n-4}{2}$. Segue-se agora que uma das regras de iluminação tem no máximo $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores.

O polígono P_{12} ilustrado na figura 4.56(a) tem 12 vértices e requer $4 = \frac{3(12)-4}{8}$ reflectores ortogonais em vértices. Unindo polígonos idênticos a este, ver figura 4.56(b),

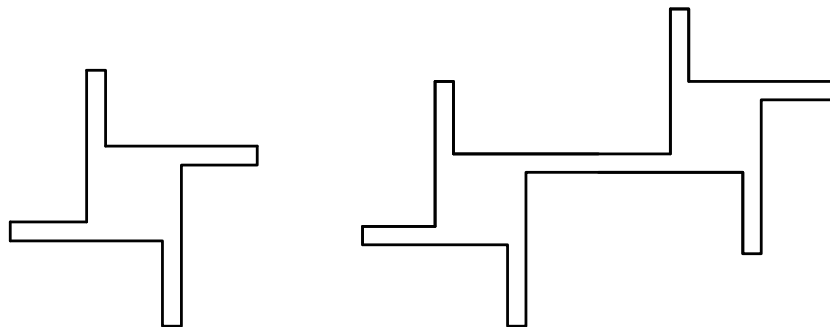


Figura 4.56: A família de polígonos que requer $\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$ reflectores ortogonais em vértices.

pode-se gerar uma família de polígonos com $12+8k$ vértices, cada um requerendo $4+3k$ reflectores em vértices. O resultado segue-se. ■

Por fim, J. Urrutia [54] provou que a quantidade $\frac{\pi}{2}$ é essencial para o resultado anterior:

Teorema 4.17 *Para cada $\epsilon > 0$ existe um polígono ortogonal que não pode ser iluminado com $\frac{\pi}{2} - \epsilon$ reflectores em vértices.*

Prova: Para cada $\epsilon > 0$ construa-se um polígono ortogonal com 12 vértices que consiste num quadrado S com quatro rectângulos R_0, \dots, R_3 colocados como na figura 4.57. Enumere-se os vértices de P como na figura 4.57 e considere-se que o ponto p é o centro de S . É fácil verificar que P pode ser construído de tal modo a que as condições seguintes sejam válidas:

1. a amplitude do ângulo $u_i v_i r_i$ é maior do que $\frac{\pi}{2} - \epsilon$, $i = 0, \dots, 3$;
2. a amplitude do ângulo $p r_i r_{i+1}$ é maior do que $\frac{\pi}{2} - \epsilon$, $i = 0, \dots, 3$, quantidade adicionada *mod* 4.

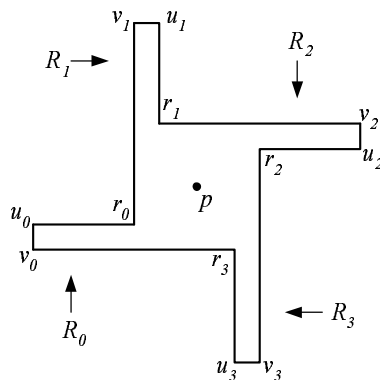


Figura 4.57: Um polígono ortogonal que não pode ser iluminado com reflectores ortogonais em vértices.

Segundo estas condições, podemos verificar que $\frac{\pi}{2} - \epsilon$ reflectores em u_i e v_i não iluminam todo o $R_i, i = 0, \dots, 3$. Para completar a iluminação de cada R_i , deve-se colocar um reflector num vértice reflexo r_i de $P, i = 0, \dots, 3$. Agora segue-se que o ponto p , no centro de S , não é iluminado. ■

J. Abello, V. Estivil-Castro, T. Shermer e J. Urrutia [1] exploraram o estudo para polígonos ortogonais com buracos utilizando reflectores ortogonais. Também utilizaram a regra de iluminação *topo-esquerda* de Urrutia.

Lema 4.20 *Seja P um polígono ortogonal com buracos. A regra topo-direita assegura que o polígono P é iluminado por reflectores ortogonais.*

Prova: Seja p um ponto do interior de P . Seja x o primeiro ponto da fronteira de P que é visível por uma semirecta horizontal de origem em p e com sentido da esquerda para a direita. Claramente, x pertence a uma aresta e de direita e p é visível de x . Considere-se um ponto x' em e com a mesma abcissa de x e ordenada superior e considere-se o rectângulo R com extremos x' e p ; (ver figura 4.58(b)).

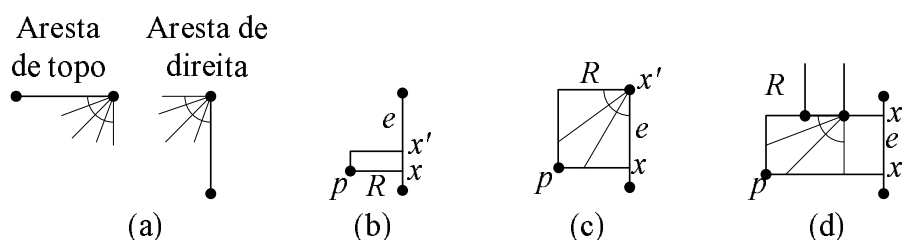


Figura 4.58: Diagrama que ilustra a colocação de reflectores pela regra Topo-direita.

Claramente, se x' for próximo o suficiente de x , o rectângulo R estará contido em P . Considere-se que x' move-se na vertical até não poder mais, ou seja, de modo que R continue a estar contido em P . Tal acontece porque, ou x' atinge o vértice de maior ordenada de e e, assim, p é iluminado por um reflector neste ponto, (ver figura 4.58(c)); ou o lado superior do rectângulo de R coincide com a aresta de topo e , assim, p é iluminado por um reflector colocado no extremo direito da aresta de topo, (ver figura

4.58(d)). Em ambos os casos p fica iluminado e, conseqüentemente, a prova está completa. ■

Lema 4.21 *Seja P um polígono ortogonal com n vértices e h buracos. Um total de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonais são suficientes para iluminar P .*

Prova: Ilumine-se o polígono P utilizando em simultâneo as quatro regras propostas por Urrutia. Considere-se que P admite n_0 vértices na fronteira externa e n_i vértices no i -ésimo buraco sendo $n = \sum_{i=0}^h n_i$. Denote-se o número de reflectores, usados pela regra X , por $\|X\|$. Note-se que cada aresta do polígono recebe no máximo dois reflectores (por exemplo, uma aresta de topo recebe um reflector no seu vértice direito, na regra Topo-direita e, no seu vértice esquerdo, na regra Topo-esquerda) e os conjuntos de reflectores de qualquer par de regras são disjuntos. No entanto, na regra Topo-direita um vértice de topo-direita convexo (vértice convexo obtido pela intersecção entre uma aresta de topo e uma aresta direita) recebe apenas um reflector. Assim, o número $\|TD\|$ (reflectores usado pela regra Topo-direita) é dado por

$$\|TD\| = \|BD\|_r + \|TE\|_r + \|TD\|_c$$

onde $\|BD\|_r$ é o número de vértices reflexos base-direita, $\|TE\|_r$ é o número de vértices reflexos topo-esquerda e $\|TD\|_c$ é o número de vértices convexos topo-direita. Assim, o número total de reflectores ortogonais utilizados pelas quatro regras é dado por $\|TD\| + \|TE\| + \|BD\| + \|BE\| = 2r + c$, onde r e c são o número de vértices reflexos e convexos de P , respectivamente. Para um polígono ortogonal sem buracos $c = \frac{n+4}{2}$ e $r = \frac{n-4}{2}$ (ver Lema 2.4). Sabendo que num polígono com buracos os vértices convexos num buraco são reflexos para o buraco, enquanto que os vértices reflexos num buraco são convexos para o buraco, então as igualdades $c = \frac{n+4}{2}$ e $r = \frac{n-4}{2}$ também são válidas para estes. Deste modo, tem-se que a regra que usa um mínimo número de reflectores requer

$$\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor = \lfloor \frac{2(r_0+c_1+\dots+c_h)+c_0+r_1+\dots+r_h}{4} \rfloor$$

reflectores, onde $c_i + r_i = n_i$ e c_i é o número de vértices convexos no i -ésimo buraco. Como $n = \sum_{i=0}^h n_i$, tem-se que $\lfloor \frac{2r+c}{4} \rfloor$ é:

$$\lfloor \frac{2[\frac{n_0-4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i+4}{2}] + \frac{n_0+4}{2} + \sum_{i=1}^h \frac{n_i-4}{2}}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor \quad \blacksquare$$

Para provar a necessidade de $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonais, observe-se o polígono P_{32} ilustrado na figura 4.59. O polígono P_{32} admite 32 vértices e 1 buraco. Este polígono é construído à custa de 4 hélices unidas de forma a obter um polígono com 1 buraco. O polígono P_{32} requer 12 reflectores ortogonais.

Assim, provou-se o seguinte Teorema:

Teorema 4.18 *Se P é um polígono ortogonal com n vértices e h buracos, então $\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$ reflectores ortogonais são sempre suficientes e por vezes necessários para iluminar P .*

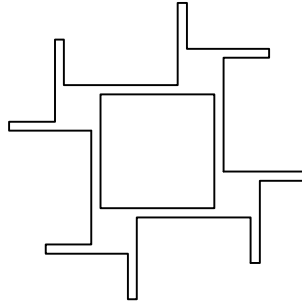


Figura 4.59: (a) Polígono P_{32} , com 32 vértices e 1 buraco que requer 12 reflectores ortogonais.

4.8 Rota do Observador e do Ladrão

Os problemas de iluminação que se seguem, conhecidos por Problema da Rota do Observador e Problema da Rota do Ladrão, foram introduzidos por Chin e Ntafos [9, 34].

Suponha-se que um guarda tem que patrulhar um polígono P . Para tal, terá que se encontrar um caminho W fechado. Este caminho inicia e finaliza no mesmo ponto S e todos os pontos de P são visíveis de um ponto de W , (ver figura 4.60(a)). De forma a minimizar a distância que o guarda deve percorrer, o ideal seria encontrar a menor rota possível a ser percorrida pelo guarda, este é o Problema da Rota do Observador. O Problema da Rota do Ladrão não é mais do que uma variante do problema anterior. Considere-se um conjunto T de pontos e um conjunto S de arestas de P . O Objectivo é encontrar um caminho W fechado, que inicia e finaliza no ponto x tal que cada ponto pertencente a uma aresta de S seja visível dum ponto de W , enquanto que W não é visível por qualquer ponto de T , (ver figura 4.60(b)).

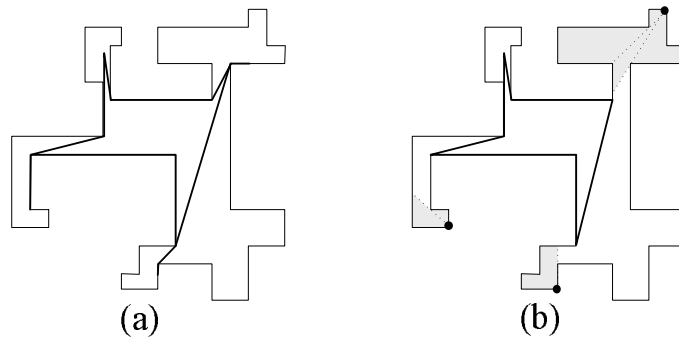


Figura 4.60: (a) Exemplo duma rota do observador; (b) Exemplo duma rota do ladrão, a visibilidade dos pontos de T está assombreado.

4.8.1 A Rota do Observador

Considera-se o problema de encontrar uma rota no interior do polígono de modo a que todos os pontos do polígono sejam visíveis pelo menos por um ponto da rota. Por exemplo, pretende-se predefinir uma rota que um guarda nocturno terá que percorrer

de modo a verificar se está tudo no devido lugar. O Problema da Rota do Observador tem como objectivo minimizar o comprimento da rota.

Primeiro, considerem-se polígonos que possam conter buracos no seu interior. Tem-se o seguinte problema:

Problema 4.5 *Seja P um polígono arbitrário com buracos. Existirá uma rota de comprimento menor ou igual a k , que não intersecte o exterior do polígono nem o interior dos buracos de modo que qualquer ponto do polígono seja visível de algum ponto da rota?*

Em 1988, Chi e Ntafos [9] provaram que este problema é NP-difícil reduzindo-o ao Problema do caixeiro viajante(PCV).

Corolário 4.1 *A Rota do Observador continua NP-difícil para polígonos ortogonais com buracos ortogonais.*

A questão que se coloca agora é se é possível construir algoritmos eficientes para polígonos simples.

Chin e Ntafos [9] consideraram o caso para polígonos ortogonais.

Primeiro, identifica-se um conjunto de linhas interiores ao polígono que qualquer Rota do Observador óptima deve visitar. Para tal, Chin e Ntafos utilizaram o $O(n \log \log n)$ algoritmo em [50]. Este algoritmo particiona um polígono simples em $O(n)$ trapézios visíveis através da introdução de segmentos de recta horizontais interiores ao polígono. Como o polígono é ortogonal, então os trapézios são rectângulos. Consideraram os segmentos de recta horizontais como sendo pares de pontos $S_i = (l_i, r_i)$, onde l_i e r_i serão os extremos esquerdo e direito dos segmentos, respectivamente. Estes pontos pertencem à fronteira do polígono e nem sempre são vértices do polígono. É importante reparar que os segmentos são estendidos o mais possível de modo a não intersectar o exterior do polígono, i.e, podem cobrir a fronteira do polígono em vários pontos.

Como já foi referido anteriormente, uma aresta dum polígono ortogonal é designada por aresta de topo (resp. base) se o interior do polígono estiver abaixo (resp. acima) desta aresta. Repare-se que de forma a que uma aresta de topo (resp. base) seja visível, uma rota do observador deve estar abaixo (resp. acima) desta aresta. Então, as arestas de topo de menor ordenada determinam a menor extensão da rota, enquanto que as arestas de base mais altas determinam a maior extensão da rota. Cada segmento S_i , na partição, corresponde a aresta(s) de base, a aresta(s) de topo ou a aresta(s) de base e de topo. Se o segmento S_i corresponde a pelo menos uma aresta de topo, então S_i é designado por segmento de base B_i . Se o segmento S_i corresponde a pelo menos uma aresta de base, é designado por segmento de topo T_i . Uma rota do observador necessita de visitar todos estes segmentos mas, uma rota óptima pode ser determinada através de segmentos de base e de topo essenciais.

Definição 4.13 *O segmento T_i (resp. B_i) é um segmento de topo (resp. base) essencial se e só se nenhum outro segmento de topo (resp. base) for de encontro, entre l_i e r_i no sentido horário (resp. anti-horário), à fronteira do polígono.*

O algoritmo que tem como objectivo encontrar uma rota do observador óptima num polígono P ortogonal simples (POS) é mostrado de seguida.

Algoritmo 4.2 *Encontrar uma rota do observador óptima num polígono P ortogonal simples (POS).*

1. Construir uma quadrilaterização de P como em [50].
2. Percorrer a fronteira de P e encontrar os segmentos essenciais de topo e de base.
3. Remover as porções do polígono que estão por cima dum segmento de topo essencial, ou por baixo dum segmento de base essencial, obtendo o polígono P_1 .
4. Rodar P $\frac{\pi}{2}$ radianos e repetir os passos 1-3, obtendo P_2 .
5. Construir $P' = P_1 \cap P_2$;
 Sejam E_1, \dots, E_m as arestas essenciais de P' encontradas nos sentido horário quando se percorre a fronteira de P' e, seja E_1 um segmento horizontal com extremos em l_1 e r_1 ;
 Construa-se uma triangulação de P' .
6. Seja S_i a manga de P' de E_i a E_{i+1} , $1 \leq i \leq m$ ($E_{m+1} = E_1$). Fazer a reflexão de S_i através de E'_1 para $1 < i \leq m$, onde E'_1 é uma reflexão de E_1 em E'_{i-1} e $E'_2 = E_2$. Continuar as reflexões para $1 \leq i \leq m$.
7. Criar uma lista D de diagonais ordenadas do topo à base e indicar por iniciais duas listas de vértices, L (caminho da esquerda) e R (caminho da direita) tal que $L_1 = l_1$ e $R_1 = r_1$.
8. Sejam os caminhos da esquerda e da direita $L = \{L_1, \dots, L_j\}$ e $R = \{R_1, \dots, R_j\}$ e seja $U \setminus R_j$ a próxima diagonal (assuma-se que U está na cadeia da esquerda), caso D não seja vazio voltar ao caminho L e encontrar o maior k de modo que o segmento de recta $[UL_k]$ seja um segmento de suporte de L .
 Se $k > 1$ então $L = \{L_1, \dots, L_k, U\}$, caso contrário, percorrer R e encontrar o menor m tal que $[UR_m]$ é um segmento de recta de suporte de R .
 Se $m > 1$ então $L = \{R_1, \dots, R_m, U\}$, caso contrário, $L = \{L'', U\}$, onde L'' é a projecção de U em E_1 .
9. Se L e R têm um ponto comum então seja X esse ponto, caso contrário, X é qualquer ponto entre R'' e L'' em E_1 .
10. Encontrar um dos caminhos mais curtos de X à sua imagem X'' em P' . A rota correspondente em P é uma óptima Rota do Observador.

Este algoritmo está ilustrado na figura 4.61. Depois de identificar os segmentos de topo e de base essenciais, o algoritmo remove as porções de P que qualquer rota mínima do observador não “visita”. Uma rota do observador necessita de passar por cada segmento essencial de modo a ver a(s) aresta(s) correspondente(s). No entanto, isto dá uma má definição de Rota do Observador óptima, porque uma rota que percorre uma distância ε , ao passar por um segmento essencial, pode sempre ser melhorada

percorrendo apenas uma distância $\frac{1}{2}\varepsilon$. Assim, estende-se a definição de visibilidade de modo a que uma aresta seja visível de qualquer ponto na sua extensão dentro do polígono. Repare-se que as arestas essenciais foram removidas. Isto pode degenerar porções da fronteira do polígono, i.e, uma aresta de base pode ficar adjacente a uma aresta de topo (sobreposição).

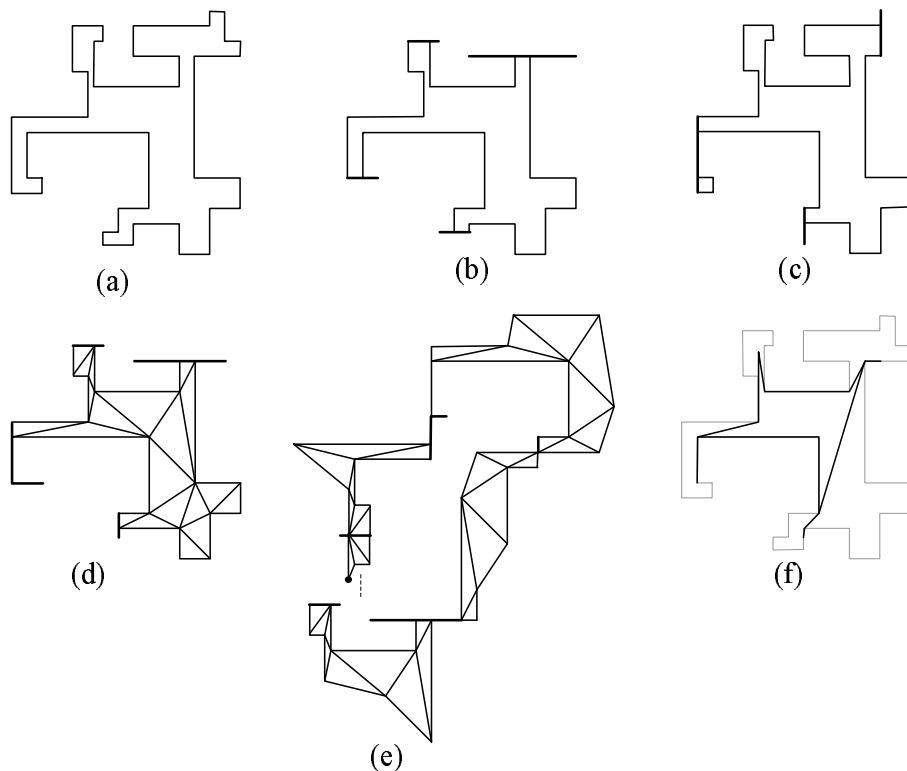


Figura 4.61: Ilustração do algoritmo 4.2.

O procedimento do algoritmo é rodar 90° o polígono original de modo a que as arestas essenciais verticais sejam encontradas. Depois de se descartarem as porções do polígono, que estão “fora” dos segmentos essenciais, o polígono resultante sofre uma triangulação e é “desenrolado” usando as arestas essenciais como espelhos. Assim, o problema da rota do observador é reduzido ao problema do menor caminho entre duas arestas, uma aresta e a sua imagem, num polígono simples. Isto é, construir o menor caminho pela esquerda e o menor pela direita que começa em l_1 e em r_1 , respectivamente. Os caminhos são ajustados à medida que se percorre a fronteira do polígono. Se eventualmente se intersectarem num ponto X , então X pertencerá a qualquer rota do observador óptima e o problema reduz-se em encontrar o menor caminho de X à sua imagem X' , que pode ser realizado num tempo $O(n)$ usando o algoritmo em [22]. Os únicos casos em que nenhum destes pontos podem ser encontrado são: quando a rota deve visitar dois lados opostos ou, quando os quatro lados de um paralelogramo. Estes casos têm uma infinidade de soluções com o mesmo tamanho. Consequentemente, o algoritmo selecciona um ponto que está numa das rotas do observador óptimas e, de novo, o problema reduz-se em encontrar o caminho mais curto entre o ponto e a sua imagem. O procedimento correcto do algoritmo segue-se do seguinte lema.

Lema 4.22 *Seja P um polígono ortogonal e P' o polígono obtido pela remoção das porções não essenciais, então nenhuma rota do observador óptima vai visitar qualquer ponto de $P \setminus P'$.*

Prova: A prova é dada por contradição. Se uma rota do observador óptima visita todos os pontos de $P \setminus P'$, então tem que intersectar uma das arestas essenciais. Qualquer ponto na secção dessa aresta, cercada pela rota, consegue ver a porção do polígono que está em $P \setminus P'$ e lhe é adjacente. A rota pode ser menor se visitar esse ponto. ■

Lema 4.23 *O caminho mais curto no polígono “desenrolado” é equivalente à rota mais curta no polígono original P .*

Prova: Sejam A e B dois pontos (resp. linhas) exteriores a uma recta (resp. segmento de recta) L . Considere-se o caminho mais curto X entre A e B que intersecta L , no ponto I . Obtenha-se o ponto B' através duma reflexão por L . Então X e $[AB']$ têm o mesmo comprimento ($\overline{AX} = \overline{AI} + \overline{IB}$ e $\overline{AB'} = \overline{AI} + \overline{IB'}$). Todas as reflexões realizadas pelo algoritmo, à medida que se “desenrola” o polígono, verificam a propriedade descrita anteriormente. Assim, o caminho mais curto obtido pelo algoritmo pode ser restringido a uma rota equivalente à do observador no polígono original. ■

Chin e Ntafos [9] chegaram ao seguinte resultado:

Teorema 4.19 *A menor rota do observador em polígonos ortogonais pode ser encontrada num tempo $O(n \log \log n)$*

Para ilustrar o algoritmo, Chin e Ntafos consideraram o polígono da figura 4.61(a). Os segmentos essenciais horizontais e verticais estão ilustrados com linhas mais carregadas nas figuras 4.61(b) e (c). O Polígono P_1 está ilustrado na figura 4.61(b) e o polígono P_2 na figura 4.61(c). Note-se que existe um número de porções degeneradas nas fronteiras de ambos os polígonos. A figura 4.61(d) mostra o polígono P' (a intersecção de P_1 e P_2). Note-se que algumas arestas essenciais degeneram em pontos. Uma possível triangulação de P' é também exemplificada na figura 4.61(d). A figura 4.61(e) mostra a versão desenrolada do polígono P' e também mostra a escolha do ponto X (este pertence a pelo menos uma rota óptima). Encontrar um caminho mais curto de X a X' dá a correspondente rota do observador óptima ilustrada na figura 4.61(f).

4.8.2 A Rota do Ladrão

Em 1990, Ntafos [34] propôs o problema da Rota do Ladrão ou o problema da rota $\{S, T\}$. Este problema generaliza o problema do observador de duas formas: primeiro pretende-se vigiar um específico subconjunto S de arestas do polígono, em vez de considerar que todos os pontos do polígono são visíveis da rota; a segunda generalização é introduzir um conjunto de pontos T que representam ameaças. Os pontos de T representam os locais onde o ladrão ficará exposto e, conseqüentemente, devem ser evitados. O problema da rota do ladrão é encontrar a menor rota, caso exista, que inicia e finaliza em x tendo em conta que cada ponto em S é visível de algum ponto da rota, enquanto

que, nenhum ponto da rota é visível de qualquer ponto de T .

O primeiro objectivo é mostrar as condições de existência da Rota do Ladrão. Seja P um polígono com n arestas, x um ponto da fronteira, S um subconjunto de arestas de P e T um conjunto de pontos de P .

Para cada t_i de T , define-se por polígono ameaça TP_i o conjunto de pontos de P que são visíveis de t_i . A colecção de polígonos ameaça para T induz uma partição do interior de P , em regiões livres e regiões bloqueadas. Cada região livre é uma região maximal conexa de P , que não pode ser visível de nenhuma ameaça. As regiões bloqueadas são visíveis por pelo menos uma ameaça. Se o ponto de partida x pertencer a uma ameaça a rota do ladrão não existe. Se x pertencer a uma região livre F , então a rota do ladrão deve estar completamente contida em F .

Se o ponto de x pertencer a uma região livre F , então a rota do ladrão existe se e só se todos os pontos de cada aresta de S forem visíveis de algum ponto de F . Se o polígono tiver buracos, percorre-se a fronteira de P tendo em conta a visibilidade das arestas de S .

Se P for um polígono simples e x pertencer a uma região livre F , a existência da rota do ladrão depende da visibilidade do caminho construído em F . A rota do ladrão deve evitar as porções da fronteira de F que limitam as regiões bloqueadas, pois estas são visíveis por pelo menos uma ameaça.

Considere-se as possíveis localizações dos segmentos $s_i \in S$ visíveis da rota que percorrem a fronteira de F . Se s_i estiver totalmente contida em F é trivialmente visível da fronteira de F e a rota do ladrão que a vê existe. Se s_i estiver apenas parcialmente contida em F , então pode-se particioná-la em duas arestas, uma em F e outra fora, e modificar convenientemente S . Para cada aresta s_i que pertence ao exterior de F , tenta-se encontrar uma pequena distância na fronteira de F visível de s_i . Assim, constroem-se uma ou duas linhas limite para cada s_i exterior a F . Informalmente, as linhas limite necessitam de ser visitadas, de forma a serem visíveis de s_i , e as suas intersecções com a fronteira de F definem uma pequena distância na fronteira de F visível de s_i (a pequena distância degenera-se num ponto se tiver uma única linha limite).

Seja $s_i = (v_{ir}, v_{il})$ pertencente ao exterior de F , onde v_{ir} é o extremo de menor índice quando se percorre a fronteira de F a partir de x no sentido horário. Constróem-se os caminhos mais curtos entre v_{il} e x (caminho da esquerda) e entre v_{ir} e x (caminho da direita), no interior de P . Se ambos os caminhos forem linhas rectas, então s_i é trivialmente visível de x e remove-se s_i de S (ex: s_1 na Figura 4.62(a)).

Se nenhum dos caminhos se sobrepõe com s_i e a primeira curva do caminho da esquerda é uma curva à esquerda de v , estende-se o segmento de recta $v_{il} \rightarrow v$ e designa-se a resultante semi-recta por linha limite esquerda de s_i (ex: linha a na figura 4.62(a)); similarmente se a primeira curva do caminho da direita é uma curva à direita de v , então a extensão de $v_{ir} \rightarrow v$ é a linha limite direita de s_i . Se o caminho da direita (resp. esquerda) se sobrepõe a s_i , então constrói-se uma única linha limite, a linha limite da esquerda (resp. direita) utilizando a extensão $v_{ir} \rightarrow v_{il}$ (ex: linha b na figura 4.62(a)). Suponha-se agora que a primeira curva do caminho da esquerda é uma curva à direita de v . Então, o caminho da direita também tem que ter uma primeira curva à direita e tem-se, assim, uma linha limite à direita de s_i . Constrói-se a linha limite da esquerda utilizando a extensão de $v_{il} \rightarrow v$. Roda-se a linha anterior no sentido anti-horário a

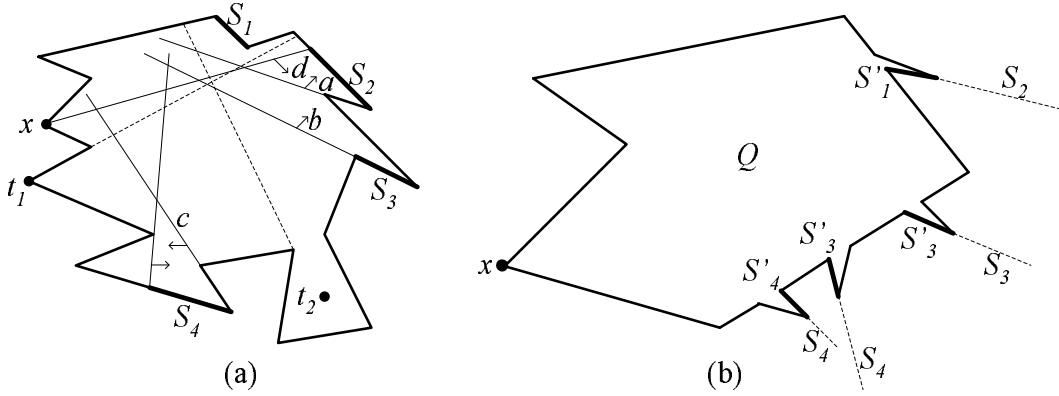


Figura 4.62: Linhas limite para arestas fora da região livre F e os seus processamentos.

partir de v_{il} até esta, ou ser uma linha limite de suporte interior da cadeia esquerda de P , ou atingir a intersecção (se existir) da linha limite direita com F (ex: linha c na figura 4.62(a)). Se o caminho da direita faz uma curva à esquerda, constrói-se a linha limite esquerda de forma análoga. Finalmente, se o caminho da esquerda (resp. direita) for uma linha recta e o caminho da direita (resp. esquerda) tiver uma curvatura, então a linha limite da esquerda (resp. direita) será uma linha recta que passa por x de v_{il} (v_{ir}) (ex; linha d na figura 4.62(a)).

Lema 4.24 *Uma rota $\{S, T\}$ num polígono simples P existe se e só se*

- (a) x estiver na região livre de F , e
- (b) para cada aresta $s_i \in S$ do exterior de F , a(s) sua(s) linha(s) limite intersectar(em) F antes de intersectar(em) o exterior de P .

Prova: Se as condições forem asseguradas, constrói-se uma rota do ladrão percorrendo a fronteira de F de x a x . Se a rota estiver contida em F não vai ser visível por nenhuma das ameaças e todos os pontos em S serão visíveis da rota, trivialmente (se e_i estiver em F) ou com recurso a pontos apropriados da fronteira de F (a pequena distância entre as intersecções com as linhas limite). Se cada uma das condições não se verificar é claro que nenhuma rota do ladrão existe. ■

De seguida, se P admitir buracos, percorre-se P tendo em conta a visibilidade das arestas de S . Se P é simples procuram-se as condições do Lema 4.24 para cada aresta de S .

Após determinar que existe uma rota do ladrão pretende-se encontrar a mais curta. Tendo em conta que o problema da rota do observador é um caso particular do problema da rota $\{S, T\}$ (seja $S = E$ e $T = \emptyset$). De acordo com o Corolário 4.1 concluímos que a rota do ladrão é NP-difícil para polígonos com buracos mesmo que não haja ameaças.

Para encontrar a rota do ladrão mais curta dum polígono simples, modifica-se P de forma a que o problema da rota do ladrão em P seja equivalente ao problema da rota

do observador num polígono apropriado R . Constrói-se R em duas fases: primeiro constrói-se o polígono Q sem ameaças e depois modifica-se Q para obter R . Para se construir Q inicia-se com F (a região livre que contém x). Tendo em conta as arestas de S que não são de F , introduz-se um conjunto de “estilhas” na intersecção da fronteira de Q com as linhas limite (figura 4.62(b)). Constrói-se um conjunto S' removendo de S todas as arestas que são trivialmente visíveis de x e substituí-se as arestas do exterior de F pelas correspondentes arestas das “estilhas” (as linhas mais escuras da figura 4.62(b)).

Lema 4.25 *O problema da rota $\{S, T\}$ em P é equivalente ao problema da rota $\{S', \emptyset\}$ em Q .*

Prova: Por construção, a rota que vê as arestas “estilha” também vê as correspondentes arestas em S . Também, qualquer rota que vê S verá S' . Ao introduzirmos as “estilhas” são adicionadas novas regiões, áreas, a F . Estas regiões pertencem ao exterior de P ou às regiões bloqueadas de P . Isto não é problema, porque nenhuma rota mais curta $\{S', \emptyset\}$ em Q entra nas “estilhas”. Se tal acontecesse, a rota que se move ao longo da fronteira da “estilha” (em vez de entrar nela) teria as mesmas propriedades de visibilidade e seria a mais curta. ■

Depois, eliminam-se as porções de Q que não contêm arestas de S e que nunca vão ser usadas para a rota mais curta do ladrão. Deste modo, a fronteira do polígono fica “alisada” e, qualquer rota que vê as arestas de S no polígono resultante também vê todas as outras arestas. Constrói-se as linhas limite para cada aresta em S' . Estas linhas necessitam ser visitadas a fim de verem a aresta correspondente. Constrói-se o conjunto $V = \{v_i | v_i \text{ é um extremo de alguma aresta de } S' \text{ ou é a primeira intersecção de uma linha limite com a fronteira de } Q\}$. Os pontos neste conjunto estão indexados de forma a que sejam visitados na fronteira de Q no sentido horário e iniciando em x . Constrói-se o caminho mais curto no interior de Q que liga x a v_1 , v_i a v_{i+1} e v_m a x , para $1 \leq i \leq m$. Note-se que a maioria destes caminhos mais curtos vão ser as arestas de S' . Seja R o polígono limitado por esses caminhos mais curtos. A figura 4.63 ilustra a construção de R .

Lema 4.26 *O problema da rota $\{S', \emptyset\}$ em Q é equivalente ao problema do observador em R .*

Prova: A rota do observador em R está em Q e vê S' (as arestas S' estão também em R), i.e., é uma rota $\{S', \emptyset\}$ em Q . Seja X a menor rota $\{S', \emptyset\}$ em Q . Pretende-se mostrar que X está em R . Suponha-se o contrário, que X entra na região exterior ao caminho mais curto que liga v_i a v_{i+1} com o objectivo de ver algum ponto y nalgum $s_k \in S'$. Considere-se a rota X' que segue o menor caminho que liga v_i a v_{i+1} e, de preferência, a entrar na região exterior a este caminho. Se y é visível de X' , tem-se uma contradição (já que X' é menor que X). Se y não é visível de X' , então a extensão de s_k poderá intersectar X mas não X' . Em consequência, uma das linhas limite para s_k vai intersectar o caminho mais curto, o que contradiz a construção de R . Então, X está no interior de R . Como X é uma rota $\{S, \emptyset\}$ vê todos os pontos no conjunto V .

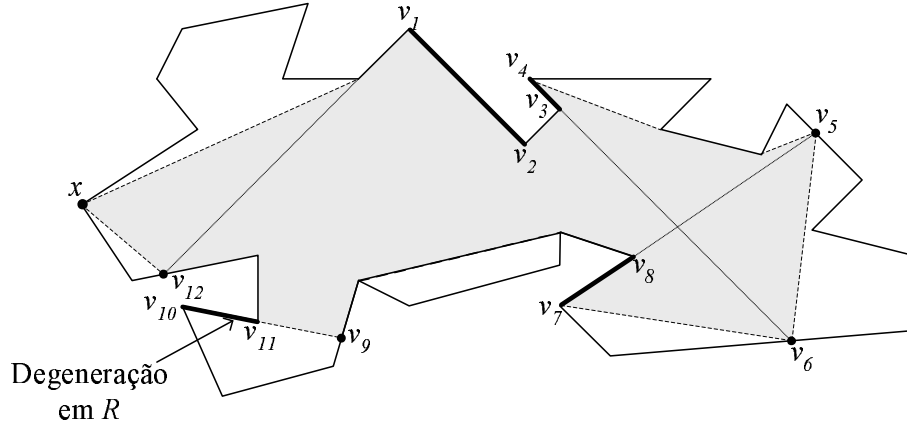


Figura 4.63: Construção de R (região assombreada) de Q com as arestas de S' (linhas mais carregadas).

Considere-se o caminho mais curto de v_i a v_{i+1} e escolha-se os seus extremos para X . Os pontos do caminho mais curto são visíveis duma pequena distância de X tendo em conta a escolha. Então X é a rota do observador mais curta em R . ■

Ntafos [34] chegou ao seguinte resultado:

Teorema 4.20 *O problema da rota do ladrão pode ser resolvido para polígonos simples em $O(n^4)$ e para polígonos ortogonais em $O(|S|n + |T|n + n \log \log n)$.*

Muitas mais propostas foram consideradas, tornando-se variantes do Teorema da Galeria de Arte. Por exemplo, Chin e Ntafos também consideraram os problemas da Rota do Guarda dum Jardim Zoológico e a Rota dum Safari, estes que têm por objectivo encontrar um caminho num polígono P que contém k “sítios” que se pretendem visitar. Suzuki e Yamashita [49] propuseram o problema em que um guarda e um ladrão podem movimentar-se livremente num polígono: o Problema do Caçador. O ladrão pode mover-se com qualquer velocidade enquanto que o guarda movimenta-se com uma velocidade limitada. Deneen e Joshi [12] propuseram a existência de valiosas relíquias num polígono P e questionaram o número mínimo de guardas móveis necessários para patrulhar P de tal forma que cada relíquia seja sempre visível por um guarda.

Conclusão

Nesta dissertação foram abordados vários conceitos importantes, utilizados na Geometria Computacional. Entre eles polígono, grafo, decomposição de polígonos, visibilidade, etc..

A decomposição de polígonos tem numerosas aplicações em Geometria Computacional. Praticamente todos os resultados apresentados foram provados recorrendo à decomposição dum polígono dado. A decomposição de polígonos também tem aplicação em VSLI, na computação gráfica, na robótica, no reconhecimento de padrões, entre outras. Por exemplo, as polícias de investigação criminal podem utilizar o reconhecimento de padrões de modo a identificar, em suportes audiovisuais, objectos ou pessoas desaparecidas.

Nesta dissertação, também foi enunciado o Teorema da Galeria de Arte e foram apresentadas duas provas distintas deste resultado clássico da Geometria Computacional: a prova de Chvátal e a prova de Fisk. A prova de Chvátal tem um grande valor histórico, pois foi o primeiro resultado obtido nesta área. Para provar alguns resultados relativos às variantes do Teorema da Galeria de Arte utilizou-se a mesma técnica que Chvátal, nomeadamente, no resultado de O'Rourke para polígonos simples vigiados com guardas móveis.

Restrições à mobilidade, localização, visibilidade, entre outras, aos guardas conduziram-nos a algumas variantes do Teorema da Galeria de Arte.

Foram introduzidos problemas com aplicações úteis. Vamos imaginar que o Museu de Aveiro recebia para exposição uma relíquia, por exemplo o quadro “Mona Lisa” do Louvre, e que se pretendia vigiar o exterior do Museu. Tal situação retrata o Problema da Fortaleza. Suponhamos agora que mais do que o exterior, também se pretendia vigiar o interior do Museu, situação esta que exemplifica o Problema do Pátio duma Prisão. Se o pretendido agora fosse vigiar a sala, onde o quadro está exposto, utilizando câmaras com uma determinada amplitude de modo que a sala fique completamente vigiada, estamos perante um problema de iluminação com reflectores. Fora do horário de funcionamento, é conveniente recrutar um guarda que vigie o Museu, percorrendo uma rota predefinida e no menor tempo possível a fim de verificar se todas as peças estão no devido lugar. Trata-se do Problema da Rota do Observador. Imaginemos agora que um assaltante pretende roubar o quadro. Para esta operação ter sucesso, o assaltante terá que previamente saber a localização das câmaras, conhecer a rota que o vigilante nocturno percorre e construir uma rota que terá de percorrer em tempo recorde de forma a não ser visto. Esta última situação não é mais do que um Problema da Rota do Ladrão.

Existem alguns resultados bastante interessantes para algumas variantes, mas permanecem ainda muitas questões em aberto, algumas dessas questões foram referidas

ao longo da dissertação.

Com a evolução das novas tecnologias, é de se prever que serão introduzidos novos tipos de guardas e deste modo serão consideradas novas variantes do Problema da Galeria de Arte.

O'Rourke mantém uma página na Internet :

“*The Open Problems Project*” (<http://cs.smith.edu/~orourke/TOPP/>)

Esta página contém uma boa colecção de problemas ainda em aberto, nomeadamente, o problema 23: “ Quantos reflectores de amplitude π são sempre suficientes, colocando no máximo um por vértice, de modo que um polígono P fique completamente iluminado?”.

Bibliografia

- [1] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer e J. Urrutia, *Illumination with orthogonal floodlights*, Algorithms and Computations (Cairns, 1995), Lectures Notes in Computer Sci., 1004, Sringer, Berlin, pp. 362-371 (1995)
- [2] A. Aggarwal, *The Art Gallery Theorem: Its variations, applications and algorithmic aspects*, PhD thesis, Johns Hopkins Univ. (1984)
- [3] T. Asano, S.K. Ghosh e T.C. Shermer, *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science B.V. (J.-R.Sack e J. Urrutia eds.), pp. 829-876 (1999)
- [4] D. Avis e G. T. Toussaint, *An efficient algorithm for decomposing a polygon into star-shaped pieces*, Pattern Recognition 13, pp. 295-298, (1981)
- [5] I. Bjorling-Sachs, e D. Souvaine, *An efficient algorithm for guard placement in polygons with holes*, Discrete and Computational Geometry 13, pp. 77-109 (1995)
- [6] D. M. Cardoso, *Curso sobre Grafos e Combinatória*, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática (1999)
- [7] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete Comput. Geom. 6, pp. 485-524 (1991)
- [8] V. Chvátal, *A Combinatorial Theorem in Plane Geometry*, Journal of Computorial Theory (B) 18, pg 39-41 (1975).
- [9] W.P.Chin e S. Ntafos, *Optimum watchman routes*, Inform. Process. Lett. 28 pp. 39-44 (1988)
- [10] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia e J. Zaks, *Guarding rectangular art galleries*, Discrete Math, 50, pp. 149-157, (1994)
- [11] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo e J. Urrutia, *Optimal floodlight illumination of stages*, Proc. 5th Canadian Conference on Computational Geometry, pp. 393-398 (1993)
- [12] L.L. Deneen e S. Joshi, *Treasures in a art gallery*, Proc. Fourth Canadian Conference on Computacional Geometry, pp. 17-22, (1992)
- [13] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke and E. Welzl, *Stationing guards in rectilinear art galleries*, Comput. Vision, Graphics and Image Process 27, pp. 167-176 (1984)

- [14] H. Edelsbrunner, M. Overmars e D. Wood, *Graphics in flatland: A case study*, in: *Advances in Computing Research*, 1 (JAI, Greenwich, CT) pp. 35-59 (1983)
- [15] V. Estivill-Castro, J. O'Rourke, J. Urrutia e D. Xu, *Illumination of polygons with vertex floodlights*, *Information Processing Letters*, 56, Vol. 1, pp. 62-73, (1995)
- [16] S. Fisk, *A Short Proof of Chvatal's Watchman Theorem*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24, pg 374 (1978)
- [17] R. J. Fowler, M. S. Paterson e S. L. Tanimoto, *Optimal packing and covering in the plane are NP-Complete*, *Info. Proc. Let.* 12, pp. 133-137, (1981)
- [18] Z. Füredi e D. Kleitman, *The Prison Yard Problem*, *Combinatorica* 14, pp. 287-300 (1994)
- [19] G. Gamble, *The Floor or Integer Part Function - 1995 Mathematics Olympiad Lecture Notes*, Department of Mathematics, University of Western Australia (1995)
- [20] M. R. Garey e D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, San Francisco, (1979)
- [21] Giblin, P.L., *Graphs, Surfaces, and Homology*, Chapman and Hall, London, pp. 41-45, (1977)
- [22] L. Guibas, J. Hershberger, D. Leven, M. Sharir e R. E. Tarjan, *Linear Times Algorithms for Visibility and Shortest Path Problems Inside Simple Polygons*, *Proc. ACM Symp. on Computational Geometry*, pp. 1-13, (1986)
- [23] E. Györy, F. Hoffman, K. Kriegel e T. Shermer, *Generalized guarding and partitioning for rectilinear polygons*, *Proceedings of the Sixth Canadian Conference on Computational Geometry* pp. 302-307, (1994)
- [24] F. Hoffman, *On the rectilinear Art Gallery Problem*, *Proc. ICALP, Lecture Notes in Comput. Sci.* 90, Springer-Verlag pp. 717-728, (1990)
- [25] F. Hoffman e K. Kriegel, *A graph coloring result and its consequences for the polygon guarding problems*, *Technical Report B 93-08*, Freie Universität Berlin (1993)
- [26] J. Kahn, M. Klawe, e D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* 4, pp. 194-206 (1983)
- [27] J. M. Keil, *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science B.V. (J.-R.Sack e J. Urrutia eds.), pp. 491-518 (1999)
- [28] A. A. Kooshesh, B. M. E. Moret, and L. A. Székely, *Improved bounds for de prison yard problem*, *Proceedings of the 21st southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing* (Boca Raton, Fla., 1990), *Congressus Numerantium* 76, pp. 145-149, (1990)
- [29] D. T. Lee e A. K. Lin, *Computational complexity of art gallery problems*, *IEEE Trans. Info. Th* IT-32, pp. 276-282, (1986)

- [30] A. Lubiw, *Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals*, Proc. 1st ACM Symp. Comp. Geom., Baltimore, pp. 97-106, (1985)
- [31] F. K. Miyazawa, *Notas de Aula de Complexidade de Algoritmos*, Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas (1999)
- [32] T. Nishizeki, *Precise proofs of some lemmas in the paper "Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs*, Carnegie-Mellon tech. report (1977)
- [33] T. Nishizeki e I. Baybars, *Lower bounds on cardinality of maximum matchings of planar graphs*, Discrete Mathematics 28, pp. 255-267 (1979)
- [34] S. Ntafos, *The robber problem*, Inform. Process. Lett. 34 pp. 59-63, (1990)
- [35] J. O'Rourke, *An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem*, J. of Geometry 21, pp. 118-130 (1983)
- [36] J. O'Rourke, *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal's Theorem*, Geometriae Dedicata 14, pp. 273-283 (1983)
- [37] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press (1987)
- [38] J. O'Rourke, D. Xu, *Illumination of polygons with 90° vertex lights*, in Snapshots in Computational Geometry, Vol. 3, pp. 109-123 (1992)
- [39] C. Papadimitriou, *The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete*, Theoret. Comput. Sci. 4, pp. 237-244 (1977)
- [40] G. H. Peñalver, *Iluminación y vigilancia en las Galerías de Arte*, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid (www.dma.fi.upm.es/gregorio/galerias.pdf)
- [41] J. C. Pina, *Análise de Algoritmos*, MAC 5747 Geometria Computacional (www.imc.usp.br/~coelho/geocomp2000/) (1998)
- [42] J. C. Pina, *Teorema da Galeria de Arte*, MAC 5747 Geometria Computacional (www.imc.usp.br/~coelho/geocomp2000/)(1998)
- [43] J. C. Pina, *Algoritmos para partição de polígonos*, MAC 5747 Geometri Computacional (www.imc.usp.br/~coelho/geocomp2000/)(2000)
- [44] D. Schuchardt e H. Hecker, *Two NP-Hard problems for ortho-polygons*, Math. Logiv Quart, 41, pp. 261-267, (1995)
- [45] T. Shermer, *Recent Results in Art Galleries*, School of Computing Science Simon Fraser University Burnaby, BC V5A 1S6 (1991)
- [46] I. Steawart, *How many guards in the gallery*, Mathematical Recreations, pg 89-90, Scientific American (1994)

- [47] K. J. Supowit, *Topics in computational geometry*, Ph.D. thesis, Univ. Illinois (1981)
- [48] S. Suri e J. O'Rourke, *Worst-case optimal algorithms for constructing visibility polygons with holes*, Proc. 2nd ACM Symp. on Computational Geometry, pp. 14-23 (1986)
- [49] I. Suzuki e M. Yamashita, *Searching for a mobile intruder in a polygonal region*, SIAM J. Comput. 21 pp. 863-888 (1992)
- [50] R. E. Tarjan e C. van Wyk, *An $O(n \log \log n)$ Time Algorithm for Triangulations Simple Polygons*, Unpublished manuscript, AT&T Bell Labs (1986)
- [51] R. Tarjan e C. van Wyk, *An $O(n \log \log n)$ time algorithm for triangulating simple polygons*, SIAM J. Comput. 17, pp. 143-178 (1988)
- [52] W. T. Tutte, *The factorization of a planar graph*, J. London Math. 22, pp. 107-111 (1947)
- [53] J. Urrutia, *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science B.V. (J.-R.Sack e J. Urrutia eds.), pp. 973-1023 (1999)
- [54] J. Urrutia, *Art Gallery and Illumination Problems*, Departement of Computer Science, University of Ottawa (1998/2002)
- [55] Mamoru Watanabe, *A few problems related to the art gallery problems*, manuscript (1990)
- [56] S.M. Yiu, *A generalized fortress problem k -consecutive vertex guards*, Proc. Seventh Canadian Conference on Computational Geometry, pp. 139-144 (1995)
- [57] S.M. Yiu e A. Choi, *Edge guards on a fortress*, Proceedings of the Sixth Canadian Conference on Computational Geometry, pp. 296-301 (1994)